

Laboratorní úloha

Stanovení Boltzmannovy konstanty pomocí voltampérové charakteristiky p - n přechodu

1.1 Úkol měření

1. Určete Boltzmannovu konstantu pomocí měření voltampérové charakteristiky p - n přechodu.
2. Určete závěrný proud p - n přechodu pro tři různé teploty.
3. Do společného grafu vyneste voltampérové charakteristiky pro všechny tři teploty.

1.2 Úvodní poznámka

Dne 20. května 2019 vstoupila v platnost nová definice soustavy jednotek SI. Spolu s touto novou definicí došlo k zafixování některých fyzikálních konstant, včetně konstanty Boltzmannovy. Boltzmannova konstanta má nyní hodnotu

$$k = 1,380\,649 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1},$$

tato hodnota je z definice přesná, a Boltzmannovu konstantu tak není třeba měřit. Faktickým cílem této laboratorní úlohy tedy není změřit hodnotu Boltzmannovy konstanty, ale vyzkoušet si, že daná fyzikální teorie funguje, osvojit si některé experimentální techniky, a zkoušet si zpracovat naměřená data.

1.3 Teoretický úvod

1.3.1 Elektrony v obalech izolovaných atomů

Stav elektronu v atomovém obalu je zcela určen pomocí čtverice tzv. kvantových čísel n, l, m_l a m_s . Hlavní kvantové číslo n nabývá celočíselných hodnot $1, 2, 3, \dots$ a souvisí zejména s energií elektronu¹. Orbitální kvantové číslo l nabývá hodnot $0, 1, 2, \dots, n - 1$, kvantuje velikost orbitálního

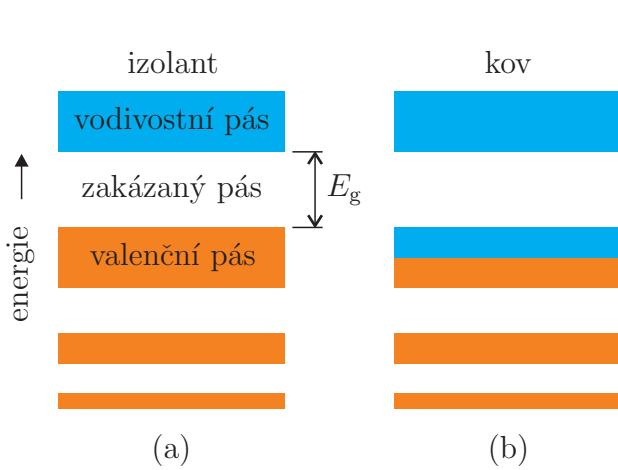
¹U atomu vodíku či vodíkupodobných iontů závisí energie (jediného) elektronu pouze na tomto čísle, s rostoucím n záporná energie elektronu narůstá (k nule, elektron je v atomu vázán, tedy čím vyšší má energii, tím slaběji je vázán). U atomů s více elektryny je situace složitější, neboť kromě přitažlivé interakce s jádrem elektryny odpudivě interagují i mezi sebou, což může mít za následek částečné stínění náboje atomového jádra a z toho vyplývající netriviální závislost energie elektronu na kvantovém čísle n a l .

momentu hybnosti elektronu, magnetické kvantové číslo m_l kvantuje průmět orbitálního momentu hybnosti elektronu do libovolné zvolené osy a nabývá hodnot $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$. Magnetické spinové číslo m_s nabývá hodnot $\pm 1/2$ a kvantuje průmět vnitřního momentu hybnosti (spinu) elektronu do libovolné zvolené osy. Všechny stavy se stejnou hodnotou n tvoří tzv. slupku, všechny stavy se stejnou hodnotou n a l tvoří tzv. podslupku. K označení podslupek se místo čísel často používají písmena: $s(l=0)$, $p(l=1)$, $d(l=2)$, $f(l=3), \dots$ Energie elektronů v obalech izolovaných atomů mohou nabývat pouze diskrétních hodnot. Energie elektronu v podslupce závisí hlavně na kvantovém čísle n a v menší míře na kvantovém čísle l . V rámci dané slupky energie elektronu narůstá s rostoucím l .

Podle Pauliho vylučovacího principu nemůžou mít žádné dva elektrony v jednom atomu stejný soubor hodnot kvantových čísel. Odtud vyplývá, že v jedné zcela zaplněné podslupce je $2(2l+1)$ elektronů (různých stavů) a v jedné zaplněné slupce pak $\sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2$ elektronů. Elektrony v atomu zaplňují jednotlivé slupky a podslupky tak, aby výsledná energie atomu byla nejmenší možná.

Takže například neon má 10 elektronů a elektronovou konfiguraci $1s^2 2s^2 2p^6$. To znamená, že v první slupce ($n=1$) v podslupce s ($l=0$) jsou dva elektrony (liší se spinovým číslem), v druhé slupce ($n=2$) v podslupce s jsou opět dva elektrony lišící se spinovým číslem a v podslupce p ($l=1$) je 6 elektronů (navzájem se liší magnetickým číslem $m_l = -1, 0, 1$ a spinovým číslem $m_s = -1/2, 1/2$). Všechny podslupky jsou tedy zcela zaplněny. Neon tedy nemá žádné slabě vázané tzv. valenční elektrony, které by vytvářely chemické vazby s ostatními atomy a je tak chemicky neutrální.

Například sodík s 11 elektronů má elektronovou konfiguraci $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$, což znamená, že 10 elektronů plně obsazuje slupku 1 a 2 a že ve třetí slupce ($n=3$) v podslupce s je pouze jeden elektron. Tento valenční elektron je k atomu vázán jen velmi slabě a proto sodík snadno reaguje chemicky s atomy, které mají neobsazený jeden stav („díru“), kterou může „zaplnit“ tento elektron.



Obrázek 1.1: Energetické pásy v izolantech (a) a v kovech (b).

Například chlor se 17 elektronů má elektronovou konfiguraci $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$, což znamená, že podslupky $1s, 2s, 2p$ a $3s$ jsou zcela zaplněny. Protože podslupka $3p$ ($l=1$) může být zaplněna $2(2l+1) = 6$ elektronů, k jejímu plnému obsazení v chloru chybí právě jeden elektron. Chlor tedy snadno chemicky reaguje s atomy, které mají valenční elektron, který může tuto díru zaplnit. Z tohoto důvodu je například chlorid sodný velmi stabilní sloučenina.

1.3.2 Vedení elektrického proudu v krystalických pevných látkách

V pevných látkách s krystalickou strukturou jsou jednotlivé atomy uspořádány do pravidelné krystalové mříže, přičemž jejich vzájemné vzdálenosti nabývají hodnot řádově 10^{-10} m. Díky těmto malým vzdálenostem (srovnatelným s rozměry jednotlivých izolovaných atomů) dochází k ovlivňování elektronů i sousedními atomy, v důsledku čehož dochází k rozštěpení jednotlivých diskrétních energetických hladin izolovaných atomů na tolik hladin, kolik je atomů v krystalové mříži.

Jelikož šířky ΔE_i takto vzniklých *energetických* pásků nabývají hodnot řádově elektronvoltů² a

²Jeden elektronvolt (1 eV) je energie, kterou získá elektron v potenciálovém rozdílu jeden volt. Platí tedy $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$.

pevné látky obsahují $N \approx 10^{23}$ atomů/cm³, jsou jednotlivé energetické hladiny v rámci pásu velmi natěsnány, je jich velmi mnoho a pásy tak mohou být považovány za spojité. Mezi těmito pásy se nacházejí oblasti energií, které žádný elektron nemůže nabývat. Tyto oblasti nazýváme *zakázanými pásy*.

Aby pevná látka mohla vést elektrický proud, musí se některé elektrony přesunout do vyšších energetických hladin.

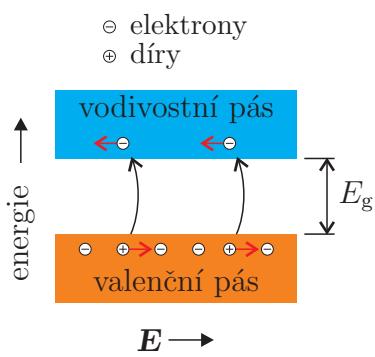
Izolanty

Jestliže je nejvyšší energetický pás obsahující elektrony (tzv. *valenční pás*) plně obsazen, viz obr. 1.1a, brání Pauliho vylučovací princip přesunu elektronů do již obsazených hladin. Volné energetické hladiny jsou k dispozici až v pásu nad zakázaným pásem energií (v tzv. *vodivostním pásu*), k jejich dosažení však elektron musí překonat energii E_g . Je-li zakázaný pás dostatečně široký, elektrony jej víceméně nemají šanci překonat a látka téměř nevede elektrický proud. Tyto látky nazýváme *izolanty*, (např. pro diamant $E_g = 5,5$ eV, střední kinetická energie tepelného pohybu částice při pokojové teplotě $E_k \approx 0,04$ eV).

Kovy

Pro *kovy* je charakteristické, že nejvyšší hladina obsazená elektrony se nachází v blízkosti středu energetického pásu, viz obr. 1.1b. Jestliže je elektrické napětí přiloženo ke kovu, elektrony z nejvyšších zaplněných hladin mohou získat část energie pole k přechodu do vyšších volných energetických hladin. Tyto tzv. vodivostní elektrony se pak mohou volně pohybovat, v důsledku čehož jsou kovy dobrými vodiči elektrického proudu.

Polovodiče



Obrázek 1.2: Pohyb elektronů a dří v elektrickém poli intenzity \mathbf{E} .

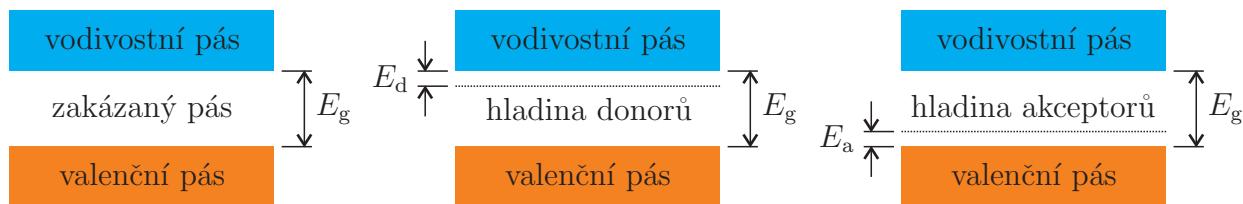
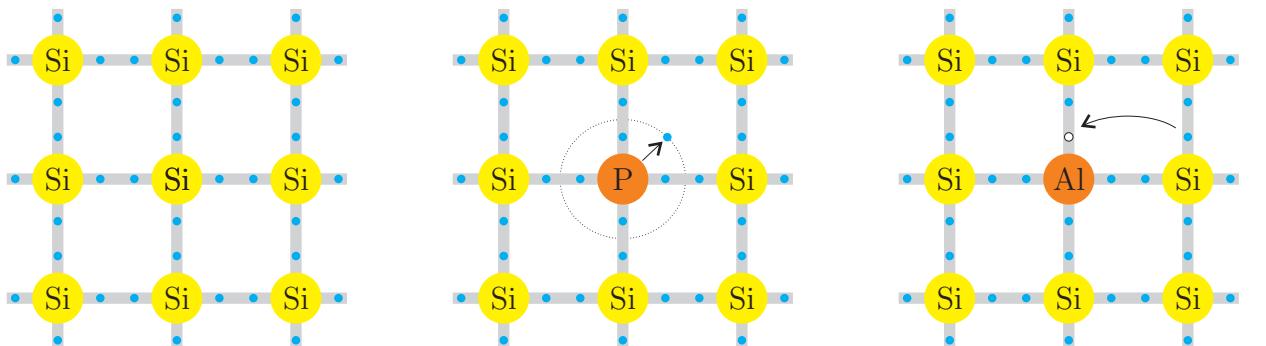
Tzv. *polovodiče* mají podobnou pásovou strukturu jako izolanty, viz obr. 1.1a, v případě polovodičů je však zakázaný pás mezi pásem valenčním a vodivostním mnohem užší. Například pro křemík $E_g = 1,1$ eV. U křemíku tak může (na rozdíl od diamantu) i při pokojové teplotě docházet díky tepelné aktivaci k přeskoku elektronů do vodivostního pásu³.

Po těchto elektronech zůstávají ve valenčním pásu neobsazené energetické stavby, tzv. *dří*.

Vytvoříme-li v polovodiči elektrické pole o intenzitě \mathbf{E} , viz obr. 1.2, mají elektrony tendenci pohybovat se ve směru k němu opačném⁴. Elektrony ve vodivostním pásu se díky velkému počtu neobsazených stavů mohou pohybovat volně, elektrony v pásu valenčním mohou zaplňovat pouze neobsazené stavby, tedy dří. Tímto mechanizmem dří driftují ve směru intenzity elektrického pole, jejich pohyb se jeví jako pohyb kladných částic. U polovodičů je tedy kromě vodivosti elektro-nové stejně důležitá i vodivost děrová.

³Rezistivita křemíku je při pokojové teplotě cca $10^{11} \times$ vyšší oproti mědi, protože koncentrace volných nosičů náboje je cca $10^{13} \times$ nižší.

⁴Pro elektrostatickou sílu působící na částici s nábojem q platí $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Jelikož elektron má náboj záporný, vektory \mathbf{E} a \mathbf{F} mají opačný směr.



(a)

(b)

(c)

Obrázek 1.3: Dvouozměrný model krystalové mříže a pásové struktury a) vlastního polovodiče, b) polovodiče typu n a c) polovodiče typu p .

Dotované polovodiče

Fyzikální vlastnosti polovodičů lze zásadním způsobem měnit přidáním malého množství příměsových atomů, tzv. *dotováním*.

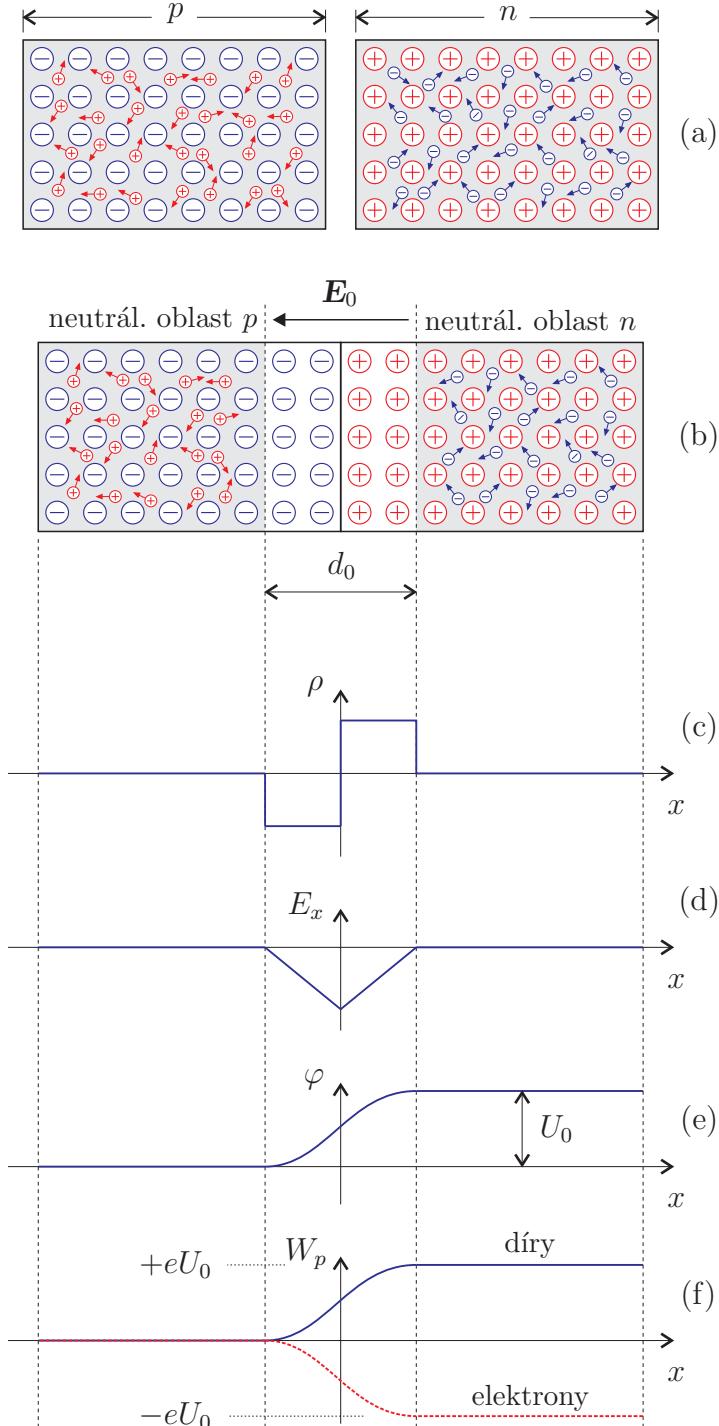
Obrázek 1.3a) zachycuje dvouozměrný model krystalové mříže typického polovodiče, křemíku. Čtrnáct elektronů v atomu křemíku má konfiguraci $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$. Každý atom křemíku přispívá čtverici slabě vázaných elektronů z podslupek $3s^2$ a $3p^2$ k vytvoření dvouelektronové kovalentní vazby⁵ s každým ze svých čtyř sousedů. Právě tyto elektrony tvoří v křemíku valenční pás. Jestliže se jeden z těchto vazebních elektronů odtrhne, může putovat krystalovou mříží (říkáme, že překonal zakázaný pás a dostal se do pásu vodivostního).

Nahradíme-li v krystalové mříži atom křemíku například atomem fosforu, viz obr. 1.3b, s 15 elektronů v konfiguraci $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^3$, zúčastní se kovalentních vazeb se sousedními křemíkovými atomy pouze čtyři z pěti valenčních elektronů (2 v podslupce $3s$ a 3 v podslupce $3p$). Zbylý elektron se vazeb neúčastní a je k atomu fosforu vázán jen velmi slabě. V pásovém diagramu [obr. 1.3b dole] tento elektron zaujímá lokalizovaný stav v blízkosti dna vodivostního pásu, energie E_d potřebná pro jeho přechod do vodivostního pásu je velmi malá v porovnání se šírkou zakázaného pásu E_g ($E_d \approx 0,05$ eV). Atom fosforu nazýváme *donor* (= dárce), protože snadno „daruje“ elektron do vodivostního pásu. Díky nízké hodnotě E_d jsou i při pokojové teplotě díky tepelné excitaci prakticky všechny elektrony dodané atomy fosforu ve vodivostním pásu, čímž dojde k podstatnému zvýšení počtu vodivostních elektronů. Polovodiče dotované atomy donorů se nazývají *polovodiče typu n*, kde n – negativní vyjadřuje, že počet záporných nosičů náboje (elektronů) ve vodivostním pásu výrazně převyšuje počet kladných nosičů náboje (díry) v pásu valenčním. V polovodiči typu n jsou elektrony *majoritními* nosiči a díry nosiči *minoritními*.

Nahradíme-li v krystalové mříži atom křemíku například atomem hliníku, viz obr. 1.3c, s 13 elektronů v konfiguraci $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1$, mohou se kovalentních vazeb se sousedními křemíkovými

⁵V kovalentní vazbě dva atomy sdílejí dvojici svých elektronů.

atomy účastnit pouze tří valenční elektrony (2 z podslupky $3s$ a 1 z podslupky $3p$). V jedné vazbě mezi hliníkem a křemíkem je tak chybějící elektron, tedy díra. Dodáním jen malé energie může být vytržen elektron ze sousední vazby aby zaplnil tuto díru, čímž však vzniká díra v této druhé vazbě a tak se pohybuje krystalovou mříží.



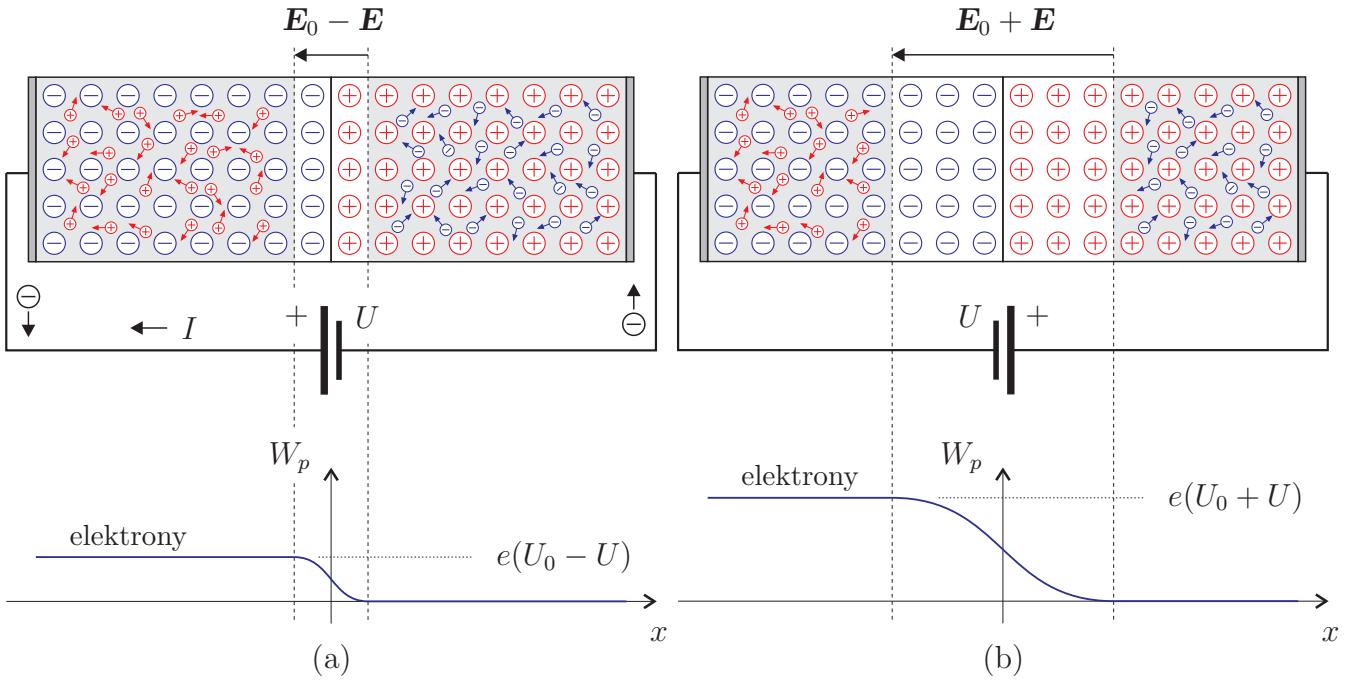
Obrázek 1.4: Přechod p - n .

Takto vzniká oblast prostorového náboje na každé straně roviny přechodu. Objemová hustota celkového náboje ρ je schematicky znázorněna na obr. 1.4c. Této oblasti se také říká *ochuzená oblast*, protože téměř neobsahuje pohyblivé nosiče náboje, její šířka d_0 je vyznačena na obr. 1.4b.

V pásovém diagramu [obr. 1.3c dole] tento elektron zaujímá lokalizovaný stav v blízkosti vrcholu valenčního pásu, energie E_a potřebná pro přechod na tuto hladinu z valenčního pásu je velmi malá v porovnání se šírkou zakázaného pásu E_g ($E_a \approx 0,05$ eV). Atom hliníku nazýváme *akceptor* (= příjemce), protože snadno „přijímá“ elektron z valenčního pásu. Díky nízké hodnotě E_a jsou i při pokojové teplotě díky tepelné excitaci prakticky všechny akceptorové hladiny hliníku obsazeny atomy z valenčního pásu, čímž dojde k podstatnému zvýšení počtu dér ve valenčním pásu. Polovodiče dotované atomy akceptorů se nazývají *polovodiče typu p* , kde p —pozitivní vyjadřuje, že počet kladných nosičů náboje (dér) ve valenčním pásu výrazně převyšuje počet záporných nosičů náboje (elektronů) v pásu vodivostním. V polovodiči typu p jsou díry *majoritními* nosiči a elektrony nosiči *minoritními*.

1.3.3 Přechod p - n

Přechod p - n je tvořen monokrystalem, který je v jedné části selektivně dotován materiálem p a v druhé n , viz obr. 1.4. V polovodiči typu n je vysoká koncentrace vodivostních elektronů, zatímco v polovodiči typu p je vysoká koncentrace vodivostních dér. Spojením obou polovodičů, viz obr. 1.4b dojde díky gradientu koncentrace v blízkosti přechodu k difúzi vodivostních elektronů z oblasti n do oblasti p a vodivostních dér z oblasti p do oblasti n . Difundující elektrony a díry v blízkosti přechodu navzájem splynou (rekombinují), takže na straně n zůstávají (nepohyblivé) kladně nabité donorové ionty a na straně p záporně (nepohyblivé) nabité akceptorové ionty.



Obrázek 1.5: Přechod p - n zapojený v propustném a závěrném směru.

Prostorový náboj napříč ochuzenou oblastí vytváří elektrické pole s intenzitou \mathbf{E}_0 , viz obr. 1.4d a tzv *kontaktní napětí* U_0 , viz obr. 1.4e. Díky kontaktnímu napětí v ochuzené oblasti narůstá potenciální energie děr pohybujících se směrem z oblasti p do oblasti n a elektronů z oblasti n do oblasti p , viz obr. 1.4f, což zabraňuje další difúzi majoritních nosičů přes rovinu přechodu.

Pro minoritní nosiče, tedy díry v oblasti n a elektrony v oblasti p je situace přesně opačná, kontaktní napětí je unáší přes rovinu přechodu. Pokud k p - n přechodu není přiložen vnější zdroj napětí, dochází ke stavu dynamické rovnováhy, kdy celkový proud přes p - n přechod vytvářený pohybem majoritních a minoritních nosičů je nulový. Vznik kontaktního napětí a proud minoritních nosičů tak zabraňuje neomezenému přenosu náboje přes rovinu přechodu.

1.3.4 Přechod p - n v propustném a závěrném směru

Obrázek 1.5 a) zachycuje zdroj elektromotorického napětí U připojený k p - n přechodu tak, že kladný pól je připojen k oblasti p a záporný k oblasti n . Tím se část p stává kladnější než před připojením zdroje a část n zápornější, elektrony difundující z oblasti n do oblasti p tak nemusí překonávat potenciálovou bariéru výšky eU_0 , ale jen $e(U_0 - U)$, čímž se značně zvyšuje pravděpodobnost jejich průchodu rovinou přechodu. Totéž platí i pro díry difundující z oblasti p do oblasti n . V důsledku vnějšího napětí rovněž dochází k zúžení ochuzené oblasti. Jelikož tato neobsahuje téměř žádné volné nosiče náboje a tudíž má vysokou rezistivitu, její zúžení má za následek snížení jejího elektrického odporu.

Elektrony jsou do oblasti n doplňovány ze záporné svorky zdroje, elektrony odcházející z oblasti p do vnějšího obvodu můžeme chápat jako zdroj děr pro oblast p , což znamená, že do polovodičové struktury jsou neustále doplňovány majoritní nosiče náboje. Výše zmíněné má za následek, že p - n přechodem protéká velký proud a hovoříme o zapojení *v propustném směru*. Proud minoritních nosičů je proti proudu majoritních nosičů v tomto případě zcela zanedbatelný, minoritní nosiče navíc nejsou doplňovány z vnějšího zdroje.

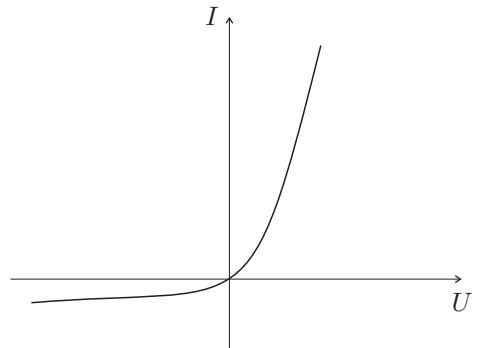
Obrázek 1.5 b) zachycuje opačný případ, kdy kladný pól zdroje je připojen k oblasti n a záporný k oblasti p . Nyní musí majoritní nosiče difundující přes rovinu přechodu překonávat potenciálovou

bariéru výšky $e(U_0 + U)$, což pravděpodobnost jejich průchodu rozhraním přechodu značně snižuje. Elektrický odpor ochuzené oblasti se vlivem jejího rozšíření zvyšuje. Proud p - n přechodem je tvořen zejména difúzí minoritních nosičů náboje a v porovnání s předchozím případem je velice malý, hovoříme o zapojení v závěrném směru.

Výše zmíněné vlastnosti p - n přechodu se dají využít k usměrňování střídavého proudu, příslušná elektronická součástka se nazývá dioda a je tvořena právě jedním p - n přechodem. Voltampérová charakteristika ideální diody se dá popsat vztahem

$$I = I_0 \left[\exp \left(\frac{eU}{kT} \right) - 1 \right], \quad (1.1)$$

kde I_0 je tzv. závěrný proud (závisí na vlastnostech p - n přechodu a na teplotě), k je Boltzmannova konstanta, a T je termodynamická teplota (v kelvinech).



Obrázek 1.6: Voltampérová charakteristika p - n přechodu.

1.4 Postup měření

K měření Boltzmannovy konstanty použijeme teoretického vztahu pro voltampérovou charakteristiku p - n přechodu (1.1). Jelikož měření budeme provádět v režimu, kdy platí $I \gg I_0$, můžeme vztah (1.1) zjednodušit do tvaru

$$I = I_0 \exp \left(\frac{eU}{kT} \right). \quad (1.2)$$

Naměřené dvojice hodnot U_i, I_i , kde $i = 1, \dots, N$, proložíme pomocí metody nejmenších čtverců⁶, exponenciálou

$$I = Ae^{\alpha U}, \quad (1.3)$$

čímž nalezneme neznámé koeficienty A a α . Porovnáním vztahů (1.2) a (1.3) dostaneme vztahy pro hledané veličiny

$$I_0 = A, \quad k = \frac{e}{\alpha T}.$$

Samotné měření voltampérové charakteristiky p - n přechodu je možné uskutečnit dvěma způsoby:

1. Měření voltampérové charakteristiky je možné provést přímo na zvolené diodě. Pro minimizaci chyby měření je nutné zvolit zapojení, které je uvedeno na obrázku 1.7.

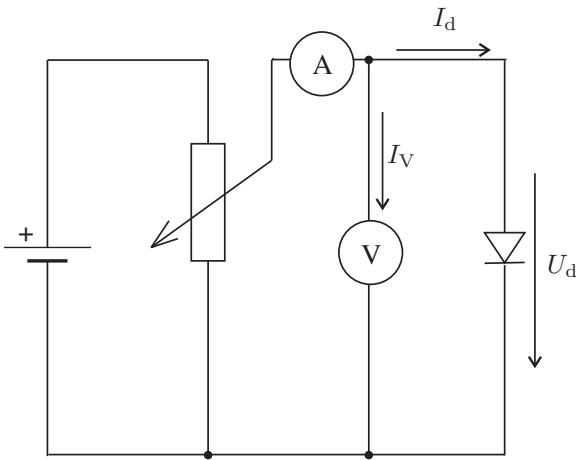
Navíc je nezbytné k měření napětí U na diodě použít voltmetri s dostatečně velkým vnitřním odporem, tj. při nejmenším měřeném proudu diodou I_{dmin} by mělo platit, že $I_{dmin} \gg I_V$, kde I_V je proud tekoucí použitým voltmetrem.

2. Další z možností (**ta je využita při vlastním měření**) jak měřit voltampérovou charakteristiku p - n přechodu je použití tranzistoru v zapojení se společnou bází, viz obr. 1.8.

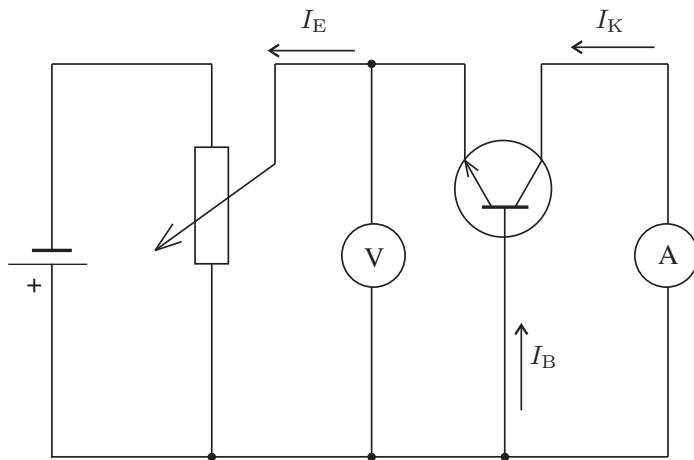
Při malém úbytku napětí na použitém ampérmetru je napětí mezi kolektorem a bází $U_{KB} \doteq 0$. Pak zbytkový proud $I_{KB} \doteq 0$ a pro kolektorový proud I_K lze psát

$$I_K = \frac{\beta_0}{\beta_0 + 1} I_E,$$

⁶K výpočtu (a zhotovení grafů) můžete použít *Univerzální nástroj na kreslení grafů* na serveru <http://herodes.feld.cvut.cz>.



Obrázek 1.7: Principiální schéma zapojení měření p-n přechodu pomocí diody.

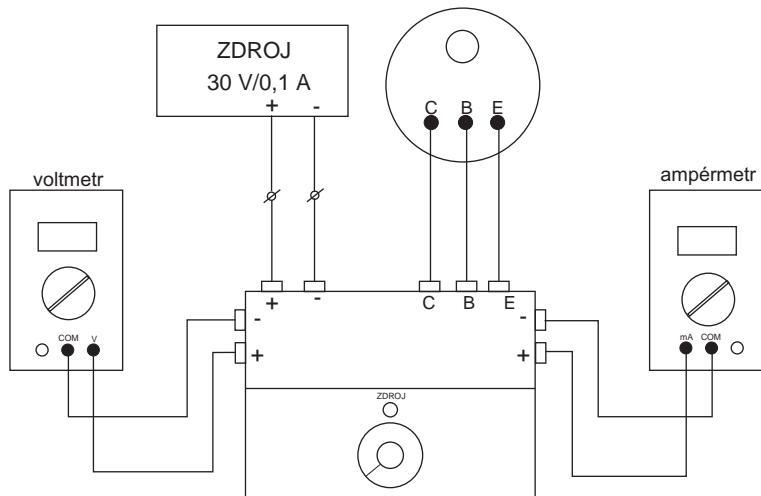


Obrázek 1.8: Principiální schéma měření p-n přechodu pomocí tranzistoru.

kde β_0 je zesilovací činitel a I_E je emitorový proud. V případě, že je splněna podmínka $\beta_0 \gg 1$, pak $I_K \doteq I_E$. Emitorový proud tedy prochází měřeným p-n přechodem báze-emitor, avšak z oblasti báze pokračuje dále do kolektoru, kde je měřen. Ampérmetr tak není zapojen v sérii s měřeným přechodem a neovlivňuje napětí naměřené na přechodu.

Na základě výše uvedeného můžeme vlastní postup měření popsat následovně:

1. Měření provedeme pro tři různé teploty p-n přechodu, které budou od sebe dostatečně vzdáleny. Zvolené pracovní teploty p-n přechodu budou zajištěny pomocí tepelných lázní, do kterých bude měřený p-n přechod vložen. K tomuto účelu použijeme Dewarovu nádobu (termosku), kterou naplníme vodou přímo z vodovodu až po uvnitř vyznačenou rysku. Jednotlivé teploty lázně volíme tak, aby byl mezi nimi co největší rozdíl, tj. použijeme vodu studenou (po dostatečném odpuštění), vlažnou a horkou (po dostatečném odpuštění). K získání vyšších teplot lázně (vody) je možné použít i rychlovárnou konvici, přičemž teplota vody by neměla přesáhnout 60 °C.
2. Zapojíme měřený p-n přechod podle příslušného schématu (1.9) a vložíme do teplotní lázně.
3. Po vyrovnaní teploty mezi lázní a použitým p-n přechodem odečteme pomocí teploměru teplotu lázně a započneme s vlastním měřením voltampérové charakteristiky. Na konci měření



Obrázek 1.9: Zapojení měřící sestavy.

opět odečteme teplotu lázně a z obou teplot určíme aritmetický průměr. *Měření provádíme pouze v propustném směru* v rozsahu proudů cca od 005 mA do cca 24 mA.

4. Po ukončení měření vyprázdníme Dewarovu nádobu.
5. Naměřené hodnoty zpracujeme pomocí metody nejmenších čtverců (viz výše) a z nalezených koeficientů určíme Boltzmannovu konstantu k , závěrný proud I_0 a jejich nejistoty.
6. Měření opakujeme stejným způsobem pro další dvě teploty.
7. Do jednoho grafu vyneseme voltampérové charakteristiky naměřené pro všechny tři teploty.

1.5 Použitá literatura

1. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fyzika*, VUTIUM-PROMETHEUS, 2000.
2. R. A. Serway, C. J. Moses, C. A. Moyer, *Modern Physics*, Cengage Learning, 2004.
3. M. Bednářík, P. Koníček, Ondřej Jiríček, *Fyzika I a II – Fyzikální praktikum*, [skriptum], Vydatelství ČVUT, Praha, 2003.

13. srpna 2019, Milan Červenka, milan.cervenka@fel.cvut.cz