

Úloha N 1

Určení gravitační konstanty pomocí Cavendishových torzních vah

1.1 Úkol měření

Úkolem měření je určit gravitační konstantu Newtonova univerzálního zákona o gravitaci pomocí Cavendishových torzních vah.

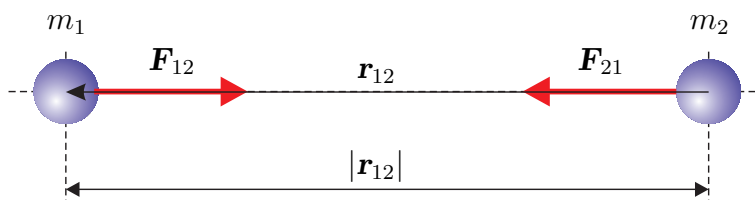
1.2 Teoretický úvod

1.2.1 Newtonův gravitační zákon

K objevení univerzálního zákona o gravitaci přispěl největší měrou Isaac Newton (1642-1727), který jej formuloval roku 1684: *Libovolná dvě tělesa se přitahují silou, která je přímo úměrná součinu jejich hmotností a nepřímo úměrná čtverci jejich vzdáleností.* Gravitační zákon můžeme zapsat, viz obr. 1.1, pomocí vzorce

$$\mathbf{F}_{12} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{12}|^3} \mathbf{r}_{12}, \quad (1.1)$$

kde \mathbf{F}_{12} je síla jíž působí druhé těleso na první, \mathbf{r}_{12} je polohový vektor prvního tělesa vzhledem ke druhému tělesu a m_1 a m_2 jsou hmotnosti těles. Konstantu úměrnosti κ , (gravitační konstantu) kterou Newton neznal, poprvé experimentálně určil až v roce 1798 Henry Cavendish (1731-1810).



Obrázek 1.1: K Newtonovu gravitačnímu zákonu.

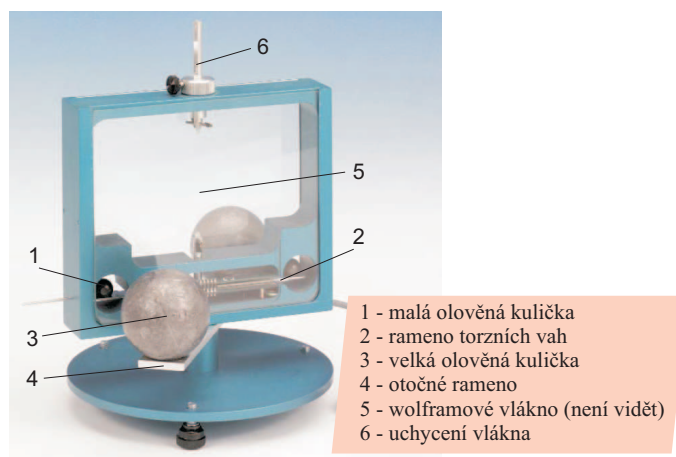
Za účelem změření gravitační konstanty použil Henry Cavendish velice citlivé torzní váhy v experimentu, jehož modernizovaná verze je náplní této laboratorní úlohy.

Newtonův gravitační zákon vyjádřený vztahem (1.1) platí přesně pro hmotné body (částice), ale dá se s dostatečnou přesností použít i pro tělesa, jejichž rozměry jsou výrazně menší, než jejich vzájemná vzdálenost. Dá se ukázat, že vzorec (1.1) platí přesně i pro koule, které ani nemusí být homogenní, stačí, když hustota bude mít kulovou symetrii. V tomto případě je můžeme nahradit

hmotnými body o hmotnosti těchto koulí umístěnými v místě středu koulí. Dle zákona akce a reakce, pokud druhé těleso působí na první těleso silou \mathbf{F}_{12} , působí i první těleso na druhé silou $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$.

1.2.2 Cavendishovy torzní váhy

Torzní váhy, viz obr 1.2, pomocí nichž určíme gravitační konstantu, jsou tvořeny otočným ramenem, na kterém jsou umístěny dvě olověné kuličky a které je zavěšeno na tenkém wolframovém vlákně o průměru $25\ \mu\text{m}$. Pokud k malým kuličkám přiblížíme větší olověné koule, způsobí gravitační přitažlivá síla otáčivý moment \mathbf{M} , který se bude snažit rameno torzních vah pootočit.



Obrázek 1.2: Cavendishovy torzní váhy.

Proti otáčivému momentu bude jako reakce působit vlákno momentem $\mathbf{M}' = -\mathbf{M}$, který má stejnou velikost, ale opačné znaménko. Velikost tohoto momentu se dá vyjádřit jako

$$M' = k_t \phi, \quad (1.2)$$

kde k_t je torzní tuhost vlákna (viz úloha *Určení modulu torze dynamickou metodou a stanovení momentu setrvačnosti*) a platí pro ni vztah

$$k_t = \frac{G\pi r^4}{2l}, \quad (1.3)$$

kde G je modul pružnosti vlákna ve smyku, r je poloměr a l je délka vlákna.

Z rovnosti velikostí obou momentů v rovnovážném stavu tedy dostaneme

$$M = k_t \phi_R, \quad (1.4)$$

kde ϕ_R je rovnovážný úhel pootočení ramene torzních vah. Pokud toto pootočení změříme, budeme schopni určit pro danou geometrii velikost gravitační síly a z ní potom gravitační konstantu.

Rameno torzních vah zavěšené na pružném vlákně se chová jako torzní kyvadlo, viz úloha *Určení modulu torze dynamickou metodou a stanovení momentu setrvačnosti*, které po vychýlení z rovnovážné polohy ϕ_R vykonává torzní kmity. Příslušná pohybová rovnice (pokud zanedbáme ztráty například díky vazkosti vzduchu) má tvar

$$J\ddot{\phi} = -k_t\phi \quad \implies \quad \ddot{\phi} + \omega^2\phi = 0, \quad (1.5)$$

kde J je moment setrvačnosti ramene torzních vah i s malými kuličkami a $\omega = 2\pi/T = \sqrt{k_t/J}$ je úhlová frekvence torzních kmitů.

Torzní tuhost vlákna raději než ze vztorce (1.3) určíme z vlastností torzních kmitů pomocí vztahu

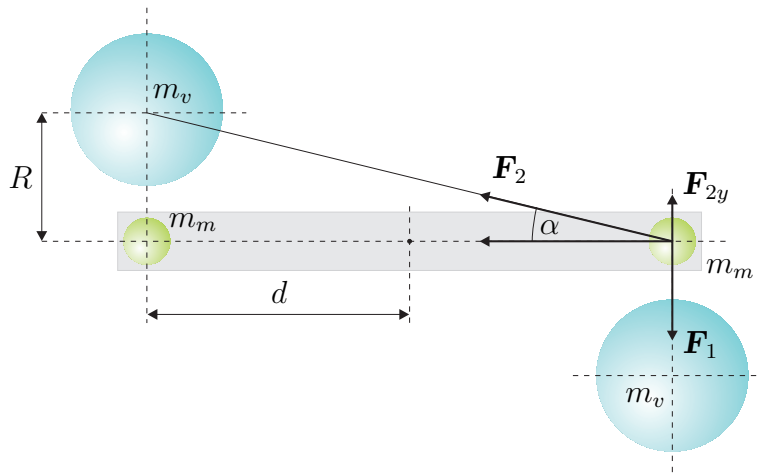
$$k_t = \frac{4\pi^2 J}{T^2}, \quad (1.6)$$

kde T je naměřená perioda torzních kmitů.

Za moment setrvačnosti do vztahu (1.6) dosadíme výraz

$$J = \underbrace{2m_m \left(\frac{2}{5}r_m^2 + d^2 \right)}_{\text{olověné kuličky}} + \underbrace{\frac{1}{3}m'_r (b^2 + h^2)}_{\text{rameno torzních vah}} - \underbrace{2m_o \left(\frac{1}{2}r_o^2 + d^2 \right)}_{\text{otvory pro kuličky}}, \quad (1.7)$$

který má tři části. První z nich odpovídá momentu setrvačnosti *dvou* olověných kuliček o hmotnosti m_m a poloměru r_m , které jsou umístěny ve vzdálenosti d od osy rotace (Steinerova věta). Druhý člen odpovídá momentu setrvačnosti samotného ramene torzních vah (plochý kvádr o délce $2b$, šířce $2h$, výšce c a hmotnosti m'_r - viz obr. 1.4 a příklad v úloze *Určení modulu torze dynamickou metodou a stanovení momentu setrvačnosti*). Třetí člen odpovídá momentu setrvačnosti *dvou* válečků o hmotnosti m_o a poloměru r_o umístěných ve vzdálenosti d od osy rotace. Tyto válečky reprezentují otvory v rameni torzních vah, do kterých jsou vsazeny malé olověné kuličky. Tento člen (se znaménkem minus) reprezentuje fakt, že při výpočtu momentu setrvačnosti ramene torzních vah (druhý člen) tyto otvory nabyly uvažovány, moment setrvačnosti je tedy o jejich příspěvek větší a je třeba odečíst jej.



Obrázek 1.3: Korekce f_1 .

Moment, který otáčí rameno torzních vah má několik složek, viz obr. 1.3. První z nich způsobuje síla \mathbf{F}_1 , kterou na sebe působí bližší malé a velké kuličky. Pro jeho složku kolmou k nákresně platí vztah (kladný směr pro otáčení ve směru hodinových ručiček)

$$M_1 = 2F_1 d = 2\kappa \frac{m_m m_v}{R^2} d, \quad (1.8)$$

kde m_m a m_v jsou hmotnosti malých a velkých kuliček, R je jejich vzájemná vzdálenost¹ a d je vzdálenost malých kuliček od osy otáčení.

¹Výchylka torzních vah je natolik malá, že vzdálenost R uvažujeme konstantní a rovnou vzdálenosti klidové.

Dále se jedná o moment způsobený silou, kterou se přitahují vzdálenější kuličky (malá a velká). Platí pro něj, viz obr. 1.3:

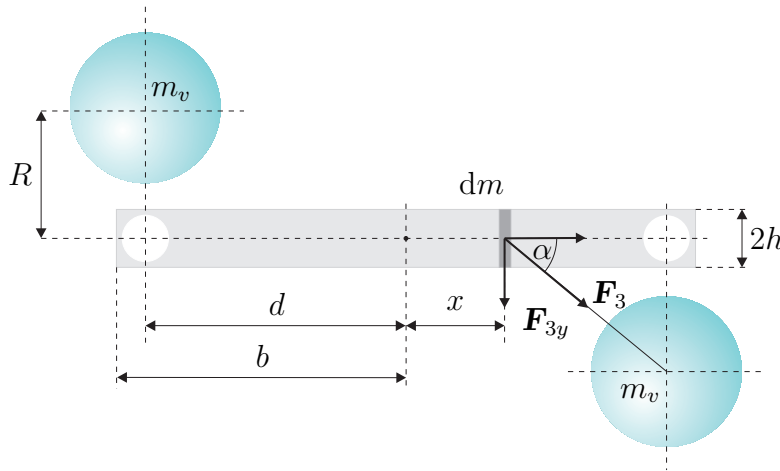
$$M_2 = -2F_{2y}d = -2F_2d \sin \alpha = -2\kappa \frac{m_m m_v}{R^2 + 4d^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + 4d^2}} d = -2\kappa \frac{m_m m_v}{R^2} f_1 d, \quad (1.9)$$

kde

$$f_1 = \frac{R^3}{(R^2 + 4d^2)^{3/2}} \quad (1.10)$$

má úlohu korekčního členu, který je tím menší, čím menší je vzdálenost R oproti d . Znaménko minus ve vztahu (1.9) vyjadřuje fakt že moment \mathbf{M}_2 má opačný směr než moment \mathbf{M}_1 .

Dále je třeba započítat moment, kterým působí velké kuličky na rameno torzních vah, viz obr. 1.4.



Obrázek 1.4: Korekce f_2 .

Rameno torzních vah rozdělíme na elementární kvádry tloušťky dx , jejichž hmotnost je $dm = \rho Q dx$, kde ρ je hustota ramene a Q je jeho průřez. Na tento element působí olověná koule silou $d\mathbf{F}_3$ o velikosti

$$dF_3 = \kappa \frac{m_v dm}{R^2 + (d-x)^2} = \kappa \frac{m_v \rho Q dx}{R^2 + (d-x)^2}.$$

Pro příslušný točivý moment (příspěvek od obou velkých koulí) potom dostaneme

$$dM_3 = 2dF_3 x \sin \alpha = 2\kappa \frac{m_v \rho R Q x dx}{[R^2 + (d-x)^2]^{3/2}}. \quad (1.11)$$

Integrací vztahu (1.11) pak dostaneme pro velikost celkového točivého momentu (viz Dodatek 1)

$$M_3 = 2\kappa m_v \rho R Q \int_{-b}^b \frac{x dx}{[R^2 + (d-x)^2]^{3/2}} = \frac{2\kappa m_m m_v}{R^2} f_2 d, \quad (1.12)$$

kde

$$f_2 = \frac{R}{2bd} \frac{m'_r}{m_m} \left[\frac{(d+b)d + R^2}{\sqrt{(d+b)^2 + R^2}} - \frac{(d-b)d + R^2}{\sqrt{(d-b)^2 + R^2}} \right] \quad (1.13)$$

má úlohu dalšího korekčního členu. Výraz $m'_r = \rho 2bQ$ představuje hmotnost ramene torzních vah (kdyby v něm nebyly vyvrtány otvory pro malé kuličky). Čím menší je tato hmotnost oproti hmotnosti malých kuliček m_m , tím menší je velikost korekčního členu f_2 .

V rámci výpočtu tohoto korekčního členu jsme započítali přitažlivost hmoty celého ramene torzních vah, ve kterém jsou ale ve skutečnosti vyvrtány dva kruhové otvory pro vložení malých kuliček (viz obr. 1.4). „Hmotnost“ každého z těchto otvorů² $-m_o$ můžeme přesunout do hmotných bodů v místě geometrických středů kruhových otvorů, takže pro výpočet příslušných přitažlivých sil a momentů použijeme stejný postup a stejné vzorce jako v případě vzájemného působení kuliček. Ve vzorcích (1.8) a (1.9) stačí hmotnosti m_m nahradit hmotnostmi $-m_o$.

Výsledný moment stáčeující rameno torzních vah tedy dostaneme ve tvaru

$$M = 2\kappa \frac{m_m m_v}{R^2} \left[(1 - f_1) \left(1 - \frac{m_o}{m_m} \right) + f_2 \right] d, \quad (1.14)$$

ve kterém lze výraz $(1 - m_o/m_m)$ interpretovat jako umělé snížení hmotnosti malých kuliček o hmotnost, která chybí v rameni torzních vah (kruhové otvory) a která je započítána v korekčním členu f_2 .

Konečný předpis pro určení gravitační konstanty dostaneme kombinací vztahů (1.4), (1.6) a (1.14). Platí tedy

$$\kappa = \frac{2\pi^2 J R^2}{T m_m m_v d [(1 - f_1) (1 - m_o/m_m) + f_2]} \phi_R. \quad (1.15)$$

Gravitační konstanta je tedy přímo úměrná pootočení torzních vah.

1.2.3 Torzní váhy - torzní kyvadlo

Gravitační konstantu určíme pomocí vzorce (1.15) z rovnovážné výchylky ramene torzních vah ϕ_R . Pokud však přiblížíme velké koule k malým, rameno torzních vah se rozkmitá tlumenými kmity a trvá dosti dlouho, než dojde k jeho ustálení. Abychom nemuseli čekat, určíme rovnovážnou výchylku ze tří po sobě jdoucích bodů obratu torzních kmitů, viz níže.

Zvolíme-li vhodným způsobem počáteční čas³ $t = 0$, můžeme pro úhlovou výchylku torzního kyvadla psát

$$\phi(t) = \phi_R + \phi_A e^{-\lambda t} \cos(\omega t).$$

Body obratu kyvadla nastávají, jestliže $\omega t = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, tedy v časech $t_n = nT/2$. Pro výchylky kyvadla v těchto bodech potom dostáváme

$$\begin{aligned} t_1 = 0 & : \phi_1 = \phi_R + \phi_A, \\ t_2 = T/2 & : \phi_2 = \phi_R - \phi_A e^{-\lambda T/2} = \phi_R - (\phi_1 - \phi_R)x, \\ t_3 = T & : \phi_3 = \phi_R + \phi_A e^{-\lambda 2T/2} = \phi_R + (\phi_1 - \phi_R)x^2, \end{aligned}$$

kde $x = e^{-\lambda T/2}$ a obecně

$$\phi_n = \phi_R + (\phi_1 - \phi_R)x^{n-1}(-1)^{n-1}, \quad (1.16)$$

$$\phi_{n+1} = \phi_R + (\phi_1 - \phi_R)x^n(-1)^n. \quad (1.17)$$

Ze vztahu (1.16) můžeme vyjádřit

$$(\phi_1 - \phi_R)x^n(-1)^n = -(\phi_n - \phi_R)x,$$

²Tato hmota v rameni vah chybí, takže působí jakoby odpudivě, proto má znaménko minus.

³Volba počátečního času nemá na výsledek žádný vliv, volíme jej tak proto, abychom zde pracovali s jednoduchými vzorci.

odkud po dosazení do (1.17) ihned dostaneme

$$\phi_R = \frac{\phi_{n+1} + x\phi_n}{1+x} = \frac{\phi_{n+2} + x\phi_{n+1}}{1+x}. \quad (1.18)$$

Porovnáním druhého a třetího členu v předchozí rovnosti dostaneme

$$x = e^{-\lambda T/2} = \frac{\phi_{n+2} - \phi_{n+1}}{\phi_n - \phi_{n+1}}. \quad (1.19)$$

S využitím vztahů (1.18) a (1.19) můžeme vypočítat rovnovážnou výchylku ramene torzních vah ze tří po sobě následujících hodnot ϕ_{n+2} , ϕ_{n+1} , ϕ_n , aniž bychom museli čekat na ustálení - vymizení torzních kmitů.

1.3 Pokyny pro měření

1.3.1 Postup měření

Upozornění: veškeré manipulace s Cavendishovými vahami provádějte s největší opatrností, pokud se vám rozkmitá rameno s malými kuličkami, jeho ustálení nastane až za velmi dlouhou dobu a měření nejspíš nestihnete dokončit.

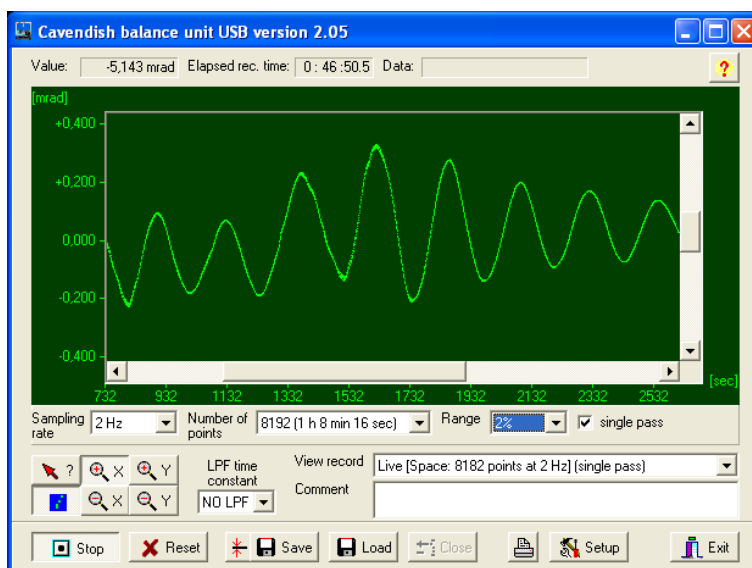
1. Přesvědčte se, že rameno torzních vah je ve vodováze - malé olověné kuličky jsou umístěny v příslušných dutinách symetricky. Pokud tomu tak není, pomocí šroubovacích nožiček Cavendishových vah situaci napravte.
2. Přesvědčte se, že rameno torzních vah míří zhruba v ose torzních vah, pokud tomu tak není, pootočte uchycením vlákna (6, obr. 1.2).
3. Rameno s velkými koulemi nastavte kolmo k ose Cavendishových vah, spusťte program *Cavendish*, viz odstavec 1.3.2, a seznamte se s jeho ovládáním. Pokud jste neprováděli žádné manipulace z bodu 1 a 2, stačí k ustálení torzních kmitů (vyvolaných pohybem ramene) cca XXX minut, pokud jste Cavendishovy váhy nastavovali, může to trvat i déle.
4. Spusťte měření programem *Cavendish*
5. Pootočte rameno s velkými koulemi na jednu stranu až nadoraz ke sklu vah, ale dejte si pozor, aby velké koule do skla neudeřily. Zaznamenejte několik bodů obratu torzních kmitů (tři jsou minimum).
6. Pootočte rameno s velkými koulemi na druhou stranu až nadoraz ke sklu vah, ale dejte si pozor, aby velké koule do skla neudeřily. Zaznamenejte několik bodů obratu torzních kmitů (tři jsou minimum).
7. Pomocí programu *Measure*, viz odstavec 1.3.3, najděte body obratu ramene torzního kyvadla změřené dle bodů 5 a 6 a pomocí vzorců (1.18) a (1.19) vypočítejte pro oba případy rovnovážné výchylky ϕ_{R1} a ϕ_{R2} . Pomocí programu *Measure* rovněž určete periodu torzních kmitů.
8. Rovnovážnou výchylku pro určení gravitační konstanty určete pomocí vztahu

$$\phi_R = \frac{1}{2} |\phi_{R1} - \phi_{R2}|,$$

kteřou pak pro určení gravitační konstanty dosadíte do vzorce (1.15).

1.3.2 Ovládání programu Cavendish

Spusťte program *Cavendish* poklepekem myši na příslušnou ikonu. Pokud jsou Cavendishovy váhy správně připojeny k počítači, objeví se okno podobné tomu na obrázku 1.5.



Obrázek 1.5: Okno obslužného programu pro Cavendishovy váhy.

Pomocí volby **Sampling rate** nastavte vzorkovací kmitočet na 2 Hz, pomocí volby **Number of points** počet odečtených hodnot na 8192 (anebo větší), pokud bude zaškrtnuta volba **single pass**, po načtení tohoto počtu vzorků se měření zastaví, jinak bude pokračovat. Pomocí volby **Range** si můžete nastavit rozlišení vertikální osy displeje (k pozorování torzních kmitů vyvolaných gravitační silou při přiblížení velkých koulí použijte největší rozlišení). Pomocí volby **LPF time constant** můžete nastavit parametry dolní propusti v případě, že by bylo měření rušeno oscilacemi raménka torzních vah. Šestice tlačítek vlevo dole slouží k nastavení „Zoomu“, (který funguje i během načítání vzorků) a k volbě, zda mají být načtené body pospojovány (levé spodní tlačítko). Načítání vzorků se spouští stiskem tlačítka **Record**, které se po stisknutí mění na tlačítko **Stop**, jehož stiskem se pak načítání vzorků ukončuje. Pokud po načtení vzorků změníte nějaké parametry, stiskem tlačítka **Reset** je uvedete v platnost. Tlačítkem s vodorovnou čarou a dvěma šipkami hned vedle napravo nastavíte nulu na aktuální pozici ramene vah (což není třeba provádět, neboť měřicí metoda přesné nastavení nuly nevyžaduje). Tlačítkem **Save** uložíte načtená data buď ve formátu ***.cav** (který umí program *Cavendish* načíst stiskem tlačítka **Load**), nebo ve formátu ***.txt**, který je čitelný v textovém editoru. **Hodnoty úhlů jsou zde uloženy v miliradiánech!** V průběhu načítání vzorků se v dvouminutových intervalech aktualizuje záložní soubor *temp.cav*, takže i kdyby došlo k násilnému přerušení měření, o načtené vzorky nepřijdete. Data si ukládejte do adresáře **D:\data**. Stisknutím tlačítka **Setup** se provádí kalibrace Cavendishových vah, kterou nemusíte provádět.

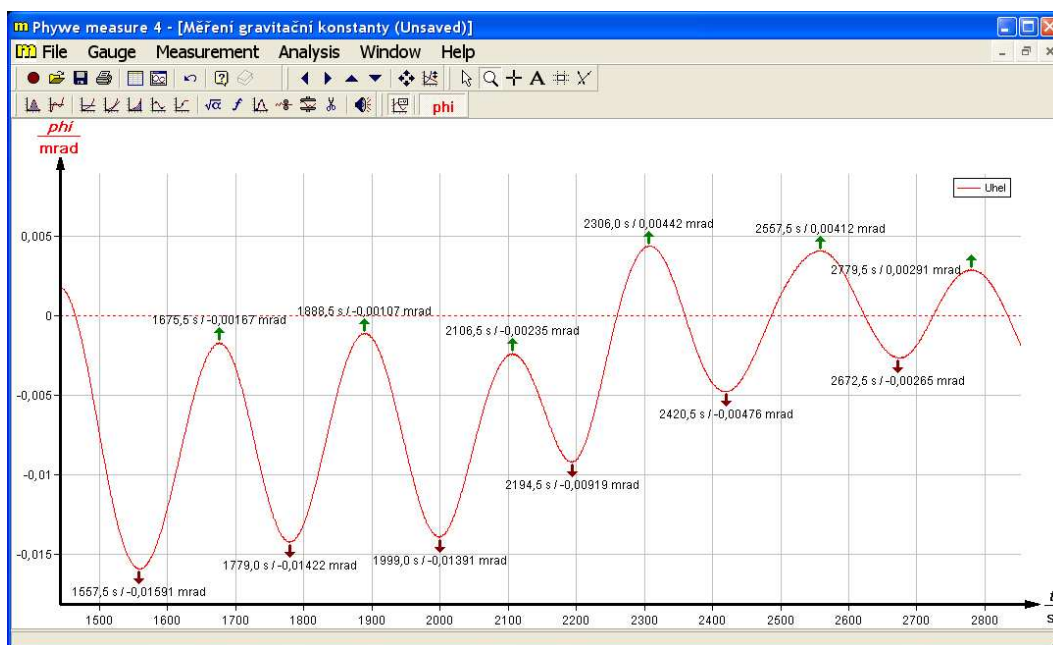
1.3.3 Zpracování dat programem Measure

Nejdříve je třeba naměřená data z textového souboru (***.txt**) nahrát do schránky (clipboardu). Otevřete tento soubor v textovém editoru a stiskněte **Ctrl+A** a pak **Ctrl+C**. Spusťte program **Measure** poklepekem myši na příslušnou ikonu. Ovládání programu je velmi jednoduché a intuitivní, takže následující popis je jen velmi stručný. V menu **Measurement** vyberte položku **Import data**. Pokud máte naměřená data ve schránce, objeví se okno, v jehož horní záložce **Channels** změňte položku **Digits beyond point** na 5. Případně zde můžete provést nastavení popisu os,

celého grafu a podobně. Po stisku tlačítka **OK** se objeví pracovní plocha s naměřeným průběhem. Naměřený průběh může být ovlivněn rychlými oscilacemi způsobenými netorzními kmity raménka vah. Tyto oscilace můžete odstranit vybráním položky **Smooth** z menu **Analysis**. Posuvným jezdce nastavte (metodou pokus-omyl) intenzitu vyhlazení a stiskněte tlačítko **Smooth**. Pokud nebudete s výsledkem spokojeni, vyberte v menu **Measurement** položku **Undo smooth** a postup opakujte.

Pomocí barevných tlačítek s názvy kanálů napravo v horní liště zobrazte toliko vyhlazený průběh a v menu **Analysis** vyberte položku **Curve analysis**. Objeví se okno, ve kterém se po stisku tlačítka **Calculate** přehledně v tabulce zobrazí polohy a hodnoty minim a maxim naměřeného průběhu. Volbou **Visualize results** se přesvědčte, zda počítač našel vše co vás zajímá, v případě nespokojenosti můžete jezdce **Tolerance** nastavit citlivost vyhledávání extrémů (je třeba znovu stisknout **Calculate**). Stiskem tlačítka **Copy** si můžete vypočtené hodnoty zkopírovat do schránky (a potom přes Poznámkový blok uložit).

Naměřený průběh (případně i se zobrazenými minimy a maximy) si můžete uložit (menu **Measurement**), položka **Export data**), do Microsoft Wordu se nejlépe hodí formát „metafile“.



Obrázek 1.6: Okno programu Measure.

1.4 Dodatek 1 - Výpočet integrálu (1.12)

$$\int_{-b}^b \frac{xdx}{[R^2 + (d-x)^2]^{3/2}} = \left| \begin{array}{l} y = d-x \\ dy = -dx \\ -b \rightarrow d+b, b \rightarrow d-b \end{array} \right| = \int_{d+b}^{d-b} \frac{ydy}{(R^2 + y^2)^{3/2}} - d \int_{d+b}^{d-b} \frac{dy}{(R^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (1.20)$$

V prvním integrálu na pravé straně uděláme substituci $z = R^2 + y^2 \rightarrow dz = 2ydy$, takže dostaneme

$$\int \frac{ydy}{(R^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \int z^{-3/2} dz = -z^{-1/2} = -\frac{1}{\sqrt{(R^2 + x^2)}},$$

v druhém integrálu na pravé straně uděláme substituci $y = R \tan z \rightarrow dy = (R/\cos^2 z)dz$, takže dostaneme⁴

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{(R^2 + y^2)^{3/2}} &= \frac{1}{R^2} \int \frac{\frac{dz}{\cos^2 z}}{\left(1 + \frac{\sin^2 z}{\cos^2 z}\right)^{3/2}} = \frac{1}{R^2} \int \cos z dz = \frac{\sin z}{R^2} = \\ &= \frac{1}{R^2} \frac{\sin z}{\sqrt{\sin^2 z + \cos^2 z}} = \frac{1}{R^2} \frac{\tan z}{\sqrt{\tan^2 z + 1}} = \frac{1}{R^2} \frac{y/R}{\sqrt{(y/R)^2 + 1}} = \frac{1}{R^2} \frac{y}{\sqrt{y^2 + R^2}}. \end{aligned}$$

Dosazením mezí do nalezených primitivních funkcí dostaneme výsledek

$$\int_{-b}^b \frac{x dx}{[R^2 + (d-x)^2]^{3/2}} = \frac{1}{R^2} \left[\frac{(d+b)d + R^2}{\sqrt{(d+b)^2 + R^2}} - \frac{(d-b)d + R^2}{\sqrt{(d-b)^2 + R^2}} \right]. \quad (1.21)$$

1.5 Dodatek 2 - Parametry Cavendishových vah

Parametr	Význam	Hodnota
m_v	Hmotnost velkých olověných koulí	1,049 kg
m_m	Hmotnost malých olověných koulí	$14,50 \cdot 10^{-3}$ kg
d	Vzdálenost malých koulí od osy rotace	$6,66 \cdot 10^{-2}$ m
R	Vzdálenost mezi středy malých a velkých koulí (v krajní poloze)	$4,62 \cdot 10^{-2}$ m
b	Polovina délky otočného ramene vah	$7,45 \cdot 10^{-2}$ m
h	Polovina šířky otočného ramene vah	$6,45 \cdot 10^{-3}$ m
c	Výška otočného ramene vah	$1,4 \cdot 10^{-3}$ m
r_o	Poloměr kruhových otvorů v otočném rameni vah	$4,5 \cdot 10^{-3}$ m
ρ	Hustota otočného ramene vah (hliník)	$2,7 \cdot 10^3$ kg m ⁻³
m'_r	Hmotnost otočného ramene „bez děr“	$7,27 \cdot 10^{-3}$ kg
J	Moment setrvačnosti otočného ramene	$1,406 \cdot 10^{-4}$ kg m ²
f_1	Korekce na gravitační působení vzdálenějších koulí	$3,52 \cdot 10^{-2}$
f_2	Korekce na gravitační působení otočného ramene	0,101

6. září 2011, Milan Červenka, Ilona Ali Bláhová, milan.cervenka@fel.cvut.cz

⁴Využijeme faktu, že $\forall z \in (-\pi/2, \pi/2): \cos z > 0$.