Úloha 1

Studium elektrostatického pole na modelech

1.1 Úkol měření

1. Změřte rozložení ekvipotenciál jedné konfigurace vzorků elektrod metodou vycházející z analogie se stacionárním elektrickým polem.

2. Na proměnné dvojici elektrod ve zvoleném uspořádání určete maximální intenzitu elektrického pole.

1.2 Obecná část

1.2.1 Vektor intenzity a potenciál elektrostatického pole

O elektrostatickém poli mluvíme, jsou-li náboje z makroskopického hlediska v naší pozorovací soustavě klidné (statické, bez pohybu). Náboje mohou být rozloženy na vodičích či izolátorech.

Uvažujme soustavu statických nábojů Q_1 až Q_N ve vakuu, které se nacházejí v bodech $\boldsymbol{r}_1$ až $\boldsymbol{r}_N$. Silové působení na náboj Q v bodě $\boldsymbol{r}$ je možné vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \ , \tag{1.1}$$

kde

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^3} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i) \ , \tag{1.2}$$

kde konstanta ε reprezentuje permitivitu, která se rovná součinu $\varepsilon_0\varepsilon_r$, přičemž ε_0 je elektrická konstanta[1] a ε_r je relativní permitivita, která se v případě vakua rovná jedné. Veličina $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ představuje vektorové pole, nazývá se *intenzitou elektrostatického pole* a reprezentuje poměr síly, kterou náboje Q_1 až Q_N působí na náboj Q a tohoto náboje. Uvažujeme-li elektrostatické pole v homogenním dielektriku, pak intenzita $\boldsymbol{E}$ je v tomto prostředí ε_r-krát menší než ve vakuu, jelikož konstanta $\varepsilon_r > 1$ a je charakteristická pro

[1] Starší název je *permitivita vakua.*

dané dielektrikum.
Uvažujme nyní skalární funkci (skalární pole) $\varphi(\boldsymbol{r})$ definovanou vztahem

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|} + C \,, \tag{1.3}$$

kde C je libovolná konstanta.
Spočítáme-li parciální derivace prvního řádu funkce $\varphi(\boldsymbol{r})$ dané (1.3)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{grad}\, \varphi(\boldsymbol{r}) \,, \tag{1.4}$$

kde symbol grad φ značí vektor grad $\varphi = (\partial\varphi/\partial x,\ \partial\varphi/\partial y,\ \partial\varphi/\partial z)$ nazývaný gradient [2] funkce φ. Skalární funkce $\varphi(\boldsymbol{r})$ nazýváme *potenciálem elektrostatického pole*. Vzhledem k platnosti vztahu (1.4) je možno potenciál použít k popisu elektrostatického pole bodových nábojů stejně tak jako intenzitu pole $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$, popis pomocí potenciálu je dokonce jednodušší.
Přítomnost volitelné konstanty C v definičním vztahu (1.3) pro potenciál ukazuje na to, že potenciál není definován jednoznačně.
Existence potenciálu obecného vektorového pole není samozřejmá a pole, která je možno vyjádřit vztahem (1.4), nazýváme *potenciálními*.
V uvažovaném poli soustavy bodových nábojů zvolme pevný bod $\boldsymbol{r}_0$, různý od všech bodů $\boldsymbol{r}_1$ až $\boldsymbol{r}_N$, ve kterých sídlí bodové náboje. Zvolme dále libovolný bod $\boldsymbol{r}$ téže vlastnosti a oba body spojme křivkou l, která je orientována z bodu $\boldsymbol{r}_0$ k $\boldsymbol{r}$ a která neprochází žádným z bodů $\boldsymbol{r}_1$ až $\boldsymbol{r}_N$. Bude nás zajímat práce $W_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0}$, kterou musí vnější síly vykonat, má-li být takový náboj Q přenesen z výchozího bodu $\boldsymbol{r}_0$ po křivce l do bodu $\boldsymbol{r}$. Platí, že

$$W_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0} = -\int_l \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \,, \tag{1.5}$$

kde $\boldsymbol{F}$ značí sílu podle (1.1), která musí být při přenášení náboje Q překonána. Využitím (1.4) dostaneme dále

$$W_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0} = -Q \int_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = Q \int_l \mathrm{grad}\, \varphi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \,. \tag{1.6}$$

Výraz

$$\mathrm{grad}\, \varphi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{1.7}$$

však představuje totální diferenciál potenciálu. Odtud vyplývá důležitý výsledek

$$W_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0} = Q \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \mathrm{d}\varphi = Q[\varphi(\boldsymbol{r}) - \varphi(\boldsymbol{r}_0)] \,. \tag{1.8}$$

$W_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0}$ závisí jen na potenciálu koncových bodů dráhy l a nezávisí na jejím průběhu. Má tedy význam potenciální energie náboje Q v bodě $\boldsymbol{r}$ vzhledem k bodu $\boldsymbol{r}_0$.
Potenciál elektrostatického pole v daném bodě představuje tedy potenciální energii vztaženou k jednotkovému náboji. Je určen vzhledem k referenčnímu bodu, jehož potenciál i polohu můžeme volit libovolně. Pokud jsou všechny náboje rozloženy v konečné části

[2]Je-li definována skalární funkce $f(x, y, z)$, pak směr a velikost jejího největšího růstu popisujeme gradientem grad$f$.

prostoru, volíme obvykle referenční bod v nekonečnu a klademe tam potenciál roven nule. Potom podle (1.6) máme

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = -\int_{\infty}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \,. \tag{1.9}$$

Fyzikální smysl má tedy jen *rozdíl potenciálů* ve dvou bodech $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, který můžeme měřit:

$$\varphi(\boldsymbol{r}_2) - \varphi(\boldsymbol{r}_1) = -\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \,. \tag{1.10}$$

Práci, kterou vykoná elektrostatické pole při přemisťování pole bodového jednotkového kladného náboje z bodu $\boldsymbol{r}_1$ do bodu $\boldsymbol{r}_2$ nazýváme *napětím* mezi těmito body:

$$U_{12} = -\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \,. \tag{1.11}$$

Napětí je tedy rovno záporně vzatému rozdílu potenciálů a je kladné, má-li výchozí bod vyšší potenciál než bod koncový. Elektrostatické pole vykoná v takovém případě při přemisťování kladného náboje kladnou práci $A = QU_{12}$.

Ze vztahu mezi intenzitou elektrického pole a jeho potenciálem (1.4) vyplývá, že siločáry[3](linie intenzity $\boldsymbol{E}$) jsou kolmé na ekvipotenciály. Z definice ekvipotenciály jako plochy, která je dána rovnicí:

$$\varphi(x, y, z) = \text{konst.} \,, \tag{1.12}$$

můžeme konstatovat, že ekvipotenciála je plocha stejného potenciálu. Povrch vodiče v elektrostatickém poli je vždy ekvipotenciálou. Uvažujme takové elementární posunutí nějakého bodu x, y, z, ležícího na ploše (1.12), že jeho nové souřadnice

$$x + \mathrm{d}x \,, \quad y + \mathrm{d}y \,, \quad z + \mathrm{d}z \tag{1.13}$$

budou ležet na stejné ploše. Pro souřadnice (1.13) můžeme vyjádřit (1.12) pomocí Taylorova rozvoje

$$\varphi(x, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathrm{d}z = \text{konst.} \,. \tag{1.14}$$

Aby platil vztah (1.12), tak z rovnosti (1.14) plyne, že

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathrm{d}z = 0 \,. \tag{1.15}$$

Ve vektorovém tvaru můžeme rovnici (1.15) napsat v následujícím tvaru:

$$\operatorname{grad} \varphi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0 \,, \tag{1.16}$$

kde $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ je elementární vektor posunutí. Z rovnice (1.16) přímo plyne, že $\operatorname{grad} \varphi$, resp. vektor intenzity $\boldsymbol{E}$, je **kolmý** na elementární vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, který vychází z bodu o souřadnicích x, y, z a ležícím na ekvipotenciále, tj. intenzita elektrického pole je kolmá v bodě x, y, z na

[3]Je to čára (linie) vektoru $\boldsymbol{E}$, k níž je orientovaná úsečka vyznačující vektor $\boldsymbol{E}$ ve všech bodech tečnou. Siločáry jsou určeny rovnicí $\boldsymbol{E} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$, kterou v kartézských souřadnicích ve složkovém tvaru můžeme vyjádřit jako: $\frac{\mathrm{d}x}{E_x} = \frac{\mathrm{d}y}{E_y} = \frac{\mathrm{d}z}{E_z}$.

ekvipotenciálu.
Připomeňme, že *uvnitř vodiče*, který je v elektrostatickém poli, platí:

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi = \boldsymbol{0}\,, \quad \varphi = 0\,. \tag{1.17}$$

Vzhledem k tomu, že měření rozložení potenciálu v elektrostatickém poli samém není z experimentálního hlediska dost dobře možné, využívá se proto jisté analogie mezi elektrostatickým polem v homogenním dielektriku a elektrickým polem uvnitř homogenního vodiče, kterým protéká stacionární, tj. časově neproměnný proud.
Elektrostatické pole v homogenním dielektriku za předpokladu, že v něm nejsou volné elektrické náboje, je popsáno následujícími rovnicemi

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0\,, \tag{1.18}$$

$$\oint_S \varepsilon\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \quad \text{neboli} \quad \oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0\,. \tag{1.19}$$

Pro stacionární elektrické pole uvnitř homogenního vodiče platí

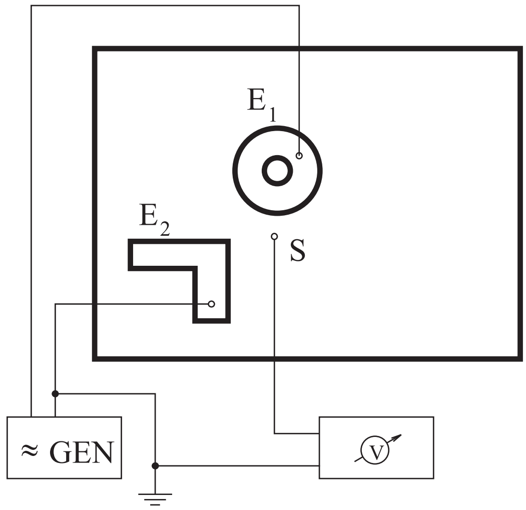
$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0\,, \tag{1.20}$$

$$\oint_S \sigma\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \quad \text{neboli} \quad \oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0\,, \tag{1.21}$$

kde $\sigma = konst. \neq 0$ je měrná vodivost.
Rovnice (1.18), (1.20) jsou přímým důsledkem existence potenciálu. Znamená to, že elektrostatické i elektrické stacionární pole je *potenciální* a *konzervativní* (energie náboje se po návratu do výchozího bodu zachovává).
Rovnice (1.19) reprezentuje Gaussův zákon, který pro případ dielektrik bez volného náboje zní: Tok intenzity elektrostatického pole uzavřenou plochou, která neobsahuje volné náboje, je nulový.
Rovnice (1.21) představuje rovnici kontinuity proudu pro stacionární pole, pro které platí, že časová změna volného náboje $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = 0$. Protože rovnice kontinuity proudu je důsledkem zákona zachování náboje, pak pro stacionární pole musí platit, že z libovolné uzavřené plochy nemůže vytékat od nuly různý stacionární (tj. časově nezávislý) proud[4], neboť by v objemu jí ohraničeném musel existovat buď zdroj nekonečného náboje, nebo by se v něm musel nekonečný náboj ztrácet.

Porovnáním rovnic (1.18) až (1.21) vidíme, že v případě rovnic (1.18), (1.20) se jedná o stejné rovnice, kdežto v případě rovnic (1.19) a (1.21) se jedná o formální totožnost. Díky této skutečnosti bude průběh intenzity elektrického pole v obou případech stejný. Jelikož platí rovnost (1.20), také pro případ stacionárního pole platí rovnice (1.14), tak průběh potenciálu bude shodný.
Z výše uvedeného vyplývá podobnost mezi elektrostatickým a stacionárním elektrickým polem, takže pomocí stacionárního elektrického pole je možné modelovat pole elektrostatické.

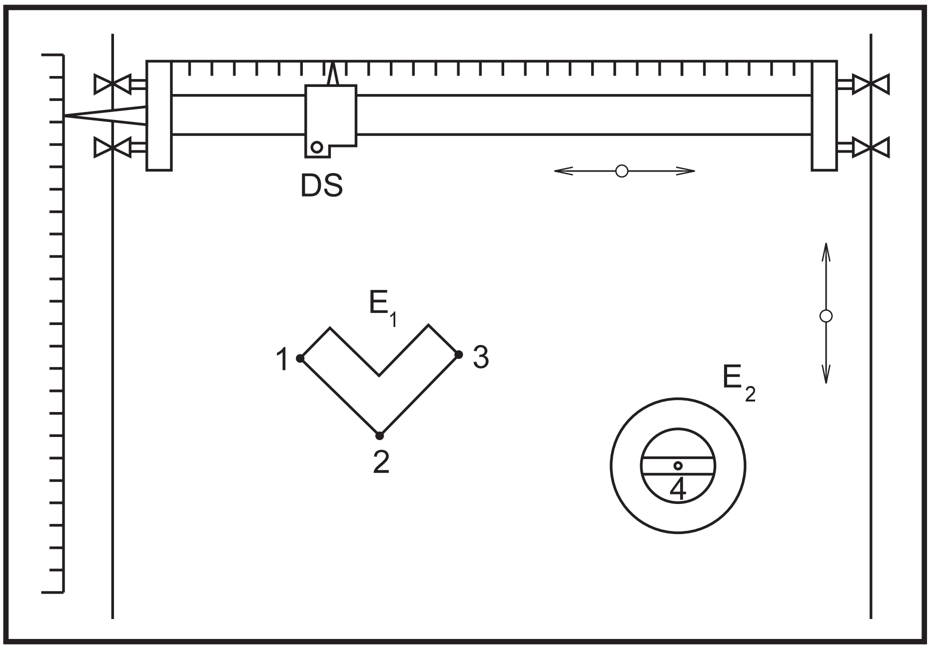
[4]Pro stacionární proud I platí, že $I = Q/t$, kde t je čas. Tedy množství náboje Q, které proteče danou plochou za čas t je $Q = It$.



Obrázek 1.1: Základní zapojení elektrolytické vany.

1.2.2 Měření rozložení potenciálu

Měření se provádí v takzvané elektrolytické vaně, což je nádoba s elektrolytem. Do elektrolytu na dno vany se vkládají tělesa imitující elektrody v elektrostatickém poli. Nádoba pro elektrolyt je relativně mělká a je zhotovena z nevodivého materiálu. Kdyby totiž vodivost stěn vany byla větší než vodivost elektrolytu, byly by stěny vany ekvipotenciálními plochami. Rozměry vany musí být takové, aby hustota proudu poblíž stěn byla mnohem menší než v prostoru, kde měříme. Jako elektrolytu používáme obvykle slabě okyselené vody a model zhotovujeme z materiálu, jehož vodivost je podstatně větší než vodivost elektrolytu. Pak je možno předpokládat, že povrch jednotlivých částí modelu má konstantní potenciál. Povrch modelu musí být ovšem dobře očištěn, aby mezi elektrolytem a kovem nebylo přechodových odporů.
Nejsnadněji se modeluje rovinné elektrostatické pole. Vycházíme přitom z přirozeného prostorového uspořádání, z něhož vyjmeme část omezenou dvěma rovnoběžnými rovinami, v nichž se tvar pole nemění, a znázorníme jí v elektrolytické vaně tak, že rovnoběžné roviny ztotožníme se dnem vany a hladinou elektrolytu. Při uložení modelu elektrodové konfigurace do elektrolytu je třeba respektovat skutečnost, že stěny vany vždy proudové pole poněkud ovlivňují. Tento vliv bude tím menší, čím větší je vana vzhledem k velikosti a vzájemné orientaci elektrod. Uspořádání pro rovinné pole je na obrázku 1.1. K elektrodám E_1, E_2 je připojen zdroj, pokud možno konstantního napětí, dodávající proud do obvodu s elektrolytem. Tento proud by měl být stejnosměrný. Polarizační jevy při použití obecných kovů jako materiálu elektrod by však měření značně rušily. Proto se užívá střídavého proudu nepříliš vysokém kmitočtu (max. $1,5$ kHz), jelikož rovnice (1.20) - (1.21) jsou i v tomto případě splněny s dostatečnou přesností. Ekvipotenciální čáry vyšetřujeme sondou S, tj. tenkou hrotovou kovovou elektrodou ponořenou trvale nebo ponořovanou bod po bodu do elektrolytu a to tak, že jí ručně nebo pomocí nějakého mechanismu přemísťujeme. Sonda je připojena k voltmetru, který měří napětí bezproudovým způsobem (voltmetr s velkým vnitřním odporem), jak to ukazuje obr. 1.1. Podle obr.1.1 tedy zjišťujeme místa se zvoleným potenciálem přímo.



Obrázek 1.2: Schematické uspořádání elektrod a souřadnicového posuvu sondy.

1.3 Postup měření

1. Zkontrolujeme libelou, je-li podstavec s elektrolytickou vanou ve vodorovné poloze.

2. Vložíme libovolné dvě elektrody do vany s elektrolytem a dáme jim libovolnou vzájemnou orientaci, při čemž dbáme, aby pokud možno nebyla překročena plocha vymezená rastrem, popřípadě rámečkem, na dně vany.

3. Do držáku sondy DS obr.1.2 vložíme a šroubem upevníme indikační hrot z umělé hmoty a pomoci souřadnicového posuvu jím určíme souřadnice x, y význačných bodů elektrod. Na obrázku 1.2 jsou to body $1, 2, 3, 4$. (U kruhových elektrod určíme pouze souřadnice středu a průměr změříme pomocným měřítkem). Pomocí souřadnic nakreslíme elektrody do grafu. S takto proměřenými elektrodami již nehýbáme.

4. K elektrodám připojíme generátor napájecího proudu.

5. Do držáku DS vložíme a šroubem upevníme sondu S. Její hrot má zasahovat asi $1 - 2$ mm pod hladinu elektrolytu.

6. Zapneme generátor a voltmetrem zkontrolujeme jeho svorkové napětí, popř. ho nastavíme na 10 V. Potom připojíme k voltmetru sondu. Používáme zapojení podle obr.1.1a.

7. Souřadnicovým mechanismem se sondou pohybujeme a hledáme body stejného potenciálu v elektrolytu. Potenciál čteme na voltmetru a nalezené body zapisujeme nebo přímo zakreslujeme do grafu (milimetrový papír) pomocí souřadnic, které čteme na stupnicích pojezdů.

8. Potenciálový krok volíme $0,5$ nebo 1 V. Body tvořící ekvipotenciální čáry vyšetřujeme zvlášť pečlivě v okolí hran a hrotů elektrod. Měříme nejen v prostoru mezi

elektrodami, ale i okolo nich, tj. i po stranách a za nimi, u kruhové elektrody také uvnitř.

9. Změřené pole nakreslíme přičemž ekvipotenciální čáry doplníme sítí čar proudových, které jsou vždy k ekvipotenciálním čarám kolmé. Ekvipotenciálními čarami jsou také obrysy elektrod. Hustota proudových čar musí odpovídat tvaru elektrod (hroty, hrany).

10. Na proměřené dvojici elektrod ve zvoleném uspořádání určíme maximální intenzitu pole podle rovnice (1.4), která v tomto případě bude mít tvar $E_s = \Delta\varphi/\Delta s$, kde $\Delta\varphi$ je změna potenciálu na vzdálenosti Δs.

11. Odhadneme maximální relativní chybu určení φ popř. E_s.

12. Uvedeným postupem proměříme dvě dvojice různých elektrod nebo dvě různá uspořádání jedné a téže dvojice elektrod. (Při výměně dbáme, abychom souřadnicový mechanismus nepokapali elektrolytem).

1.4 Kontrolní otázky

1. Co je elektrostatické pole?
2. Jaký je vztah mezi intenzitou elektrostatického pole a jeho potenciálem?
3. Co je to ekvipotenciála?
4. Co je to siločára a jak je orientována vůči ekvipotenciále?
5. Co představuje potenciál elektrostatického pole?
6. Proč vodivost stěn elektrolytické vany musí být menší než vodivost elektrolytu.

1.5 Přístroje a pomůcky

Elektrolytická vana, generátor, voltmetr, libela, měřítko, sada elektrod, indikační hrot, sonda.

1.6 Literatura

[1] Sedlák, B., Štoll, I.: Elektřina a magnetismus, Academia, Praha 2002.

[2] Brož, J. a kol: Základy fyzikálních měření I, SPN Praha 1967.

[3] Haňka, L.: Teorie elektromagnetického pole, SNTL Praha 1975

[4] Havelka, B.,Fuka, J.: Elektřina a magnetismus, SPN Praha 1965.

[5] Veverka, A.: Technika vysokých napětí, SNTL Praha 1978.

[6] Zadražil, O.: Základy elektrotechniky (cvičení), skriptum ČVUT 1980.

[7] Mádr, V., Knejzlík, J., Kopečný, J. Novotný, I.: Fyzikální měření, SNTL Praha 1991.