

Úloha 1

Měření magnetických polí

1.1 Úkol měření

1. Změřte průběh magnetické indukce uvnitř solenoidů. Naměřené hodnoty vynesete do grafu a porovnejte s průběhy teoretickými.
2. Zhodnoťte použitelnost vztahu (1.9) na základě provedených měření.
3. Změřte magnetickou indukci na ose Helmholtzových cívek pro jejich vzdálenosti $a = R/2, R, 2R$. Naměřené hodnoty vynesete do grafu spolu s teoretickými průběhy.
4. Odhadněte chybu provedených měření.

1.2 Obecná část

Výpočet magnetické indukce na ose solenoidu a Helmholtzových cívek

Vzhledem k tomu, že vyšetřujeme magnetickou indukci v ose solenoidů¹ a Helmholtzových cívek, nastíníme si její teoretický výpočet pro tyto případy.

Nejdříve uvažujme vodič kruhového tvaru o poloměru R , kterým protéká proud I . Při výpočtu vyjdeme z Biotova-Savartova zákona

$$\mathbf{B}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad \text{resp.} \quad d\mathbf{B}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (1.1)$$

kde \mathbf{B} je vektor magnetické indukce, a význam zbývajících symbolů je patrný z obrázku 1.1. Protože vektor \mathbf{s} a polohový vektor \mathbf{r} svírají úhel $\pi/2$, můžeme psát

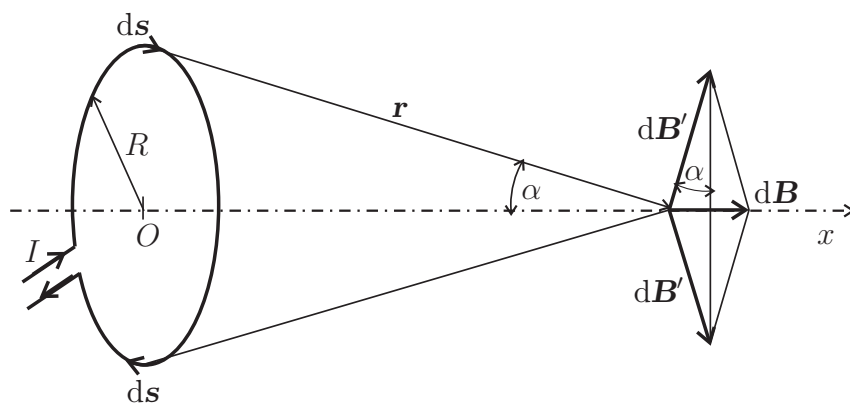
$$dB' = \frac{\mu_0 I r ds \sin(\frac{\pi}{2})}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I ds}{4\pi r^2}. \quad (1.2)$$

Uvedený vztah (1.2) platí pro velikost magnetické indukce pouze od elementu vodiče v jeho horní části. Protože vektor magnetické indukce od elementu symetricky uloženého v dolní části vodiče je stejně velký a symetrický s předchozím vektorem, takže pro výslednou velikost magnetické indukce od obou elementů platí následující vztah

$$dB = 2dB' \sin(\alpha) = \frac{\mu_0 I ds \sin(\alpha)}{2\pi r^2}. \quad (1.3)$$

¹Jedná se o válcovou jednovrstvou cívku, jejíž osová délka je značně větší než průměr závitů.

Z obrázku 1.1 jsou zřejmé následující vztahy



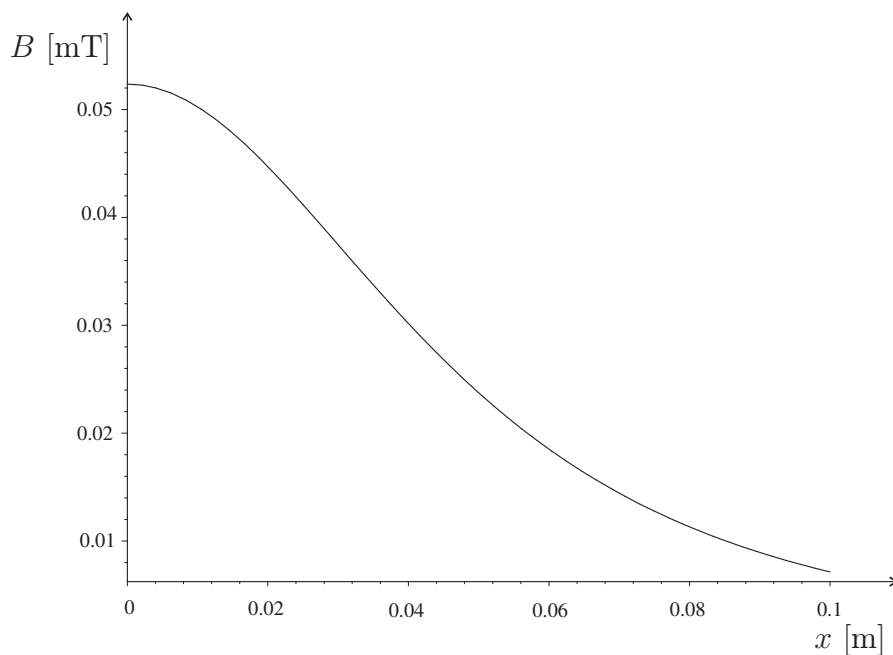
Obrázek 1.1: Magnetické pole proudové smyčky.

$$\sin(\alpha) = \frac{R}{R^2 + x^2} ; \quad r = \sqrt{R^2 + x^2} . \quad (1.4)$$

S využitím vztahů (1.3) a (1.4) dostáváme pro výslednou magnetickou indukci, že

$$B(x) = \frac{\mu_0 I \sin(\alpha)}{2\pi r^2} \int_0^{\pi R} ds = \frac{\mu_0 I \sin(\alpha)}{2\pi r^2} \pi R = \frac{\frac{\mu_0 I R}{\sqrt{R^2 + x^2}}}{2(R^2 + x^2)} R = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} . \quad (1.5)$$

V případě, že uvažujeme malý počet N identických smyček, které jsou blízko sebe, potom



Obrázek 1.2: Závislost magnetické indukce v ose smyčky v závislosti na vzdálenosti od středu ($I = 5$ A, $R = 0,06$ m).

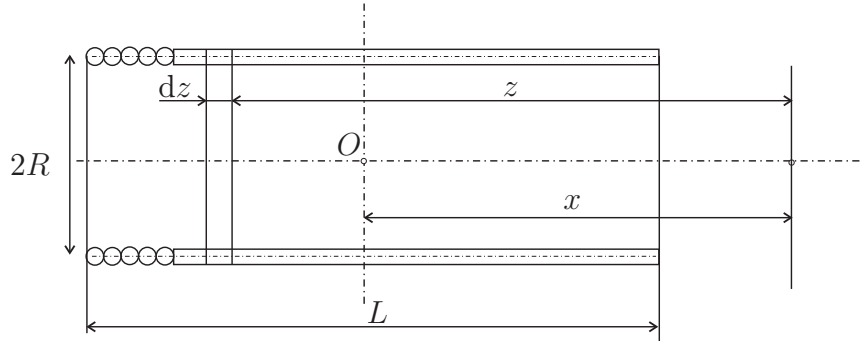
můžeme stanovit magnetickou indukci cívky B_c tak, že vynásobíme počtem závitů N vztah (1.5), tj.

$$B_c(x) \doteq \frac{\mu_0 I N R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} . \quad (1.6)$$

Chceme-li určit magnetickou indukci na ose solenoidu B_s o N závitěch, poloměru R a délky L (viz obr. 1.3), kterým protéká proud I , pak využijeme vztahu (1.5) a dostáváme

$$dB_s = \frac{\mu_0 I R^2 n}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} dz, \quad (1.7)$$

kde $n = N/L$ reprezentuje hustotu závitů. Celý solenoid v bodě vzdáleném x od středu



Obrázek 1.3: Solenoid.

O vytváří na ose magnetickou indukci hodnoty

$$B_s(x) = \int_{x-L/2}^{x+L/2} \frac{\mu_0 I R^2 n}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} dz = \frac{\mu_0 I n}{2} \left[\frac{\frac{L}{2} + x}{\sqrt{R^2 + (x + \frac{L}{2})^2}} - \frac{x - \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (x - \frac{L}{2})^2}} \right]. \quad (1.8)$$

Pomocí vztahu (1.8) můžeme vyjádřit průběh magnetické indukce uvnitř solenoidu, viz obrázek 1.4. Ze vztahu (1.8) je zřejmé, že pro $L \rightarrow \infty$ a konečnou hustotu závitů n dostáváme

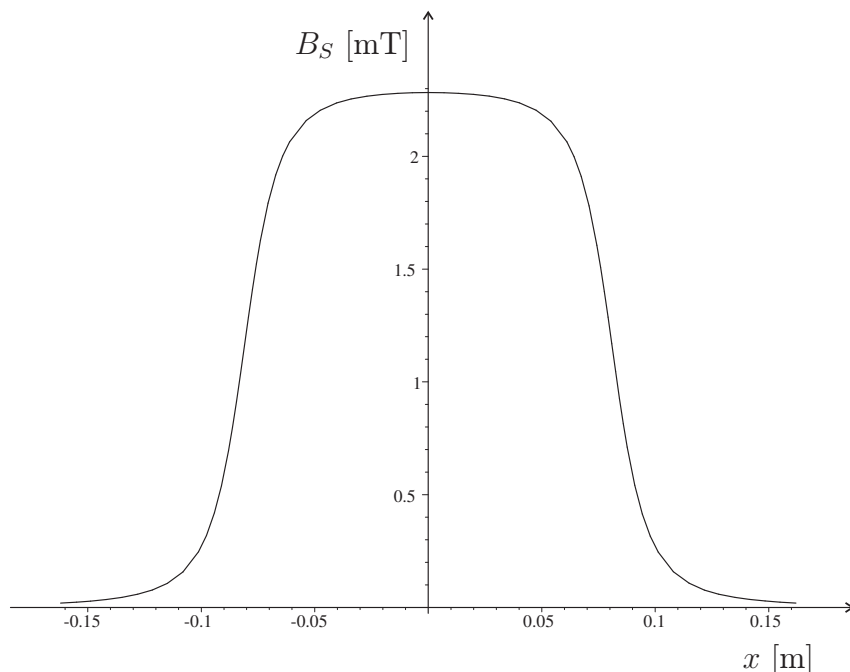
$$B_s = \mu_0 I n. \quad (1.9)$$

K vyjádření magnetické indukce B_H mezi Helmholtzovými cívkami použijeme výsledku (1.6). Z obrázku 1.5 je patrné, že pro magnetickou indukci v ose Helmholtzových cívek bude platit, že

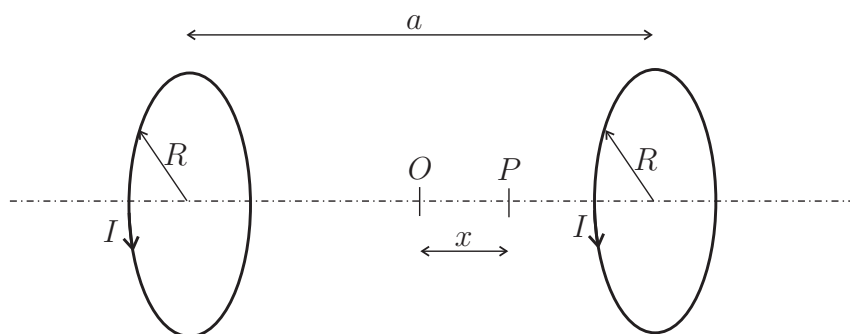
$$B_H(x) \doteq \frac{\mu_0 I N R^2}{2[R^2 + (b+x)^2]^{3/2}} + \frac{\mu_0 I N R^2}{2[R^2 + (b-x)^2]^{3/2}}, \quad (1.10)$$

kde $b = a/2$. Na obrázku 1.6 jsou zachyceny tři průběhy magnetické indukce na ose Helmholtzových cívek, které byly vypočteny pomocí vztahu (1.10). Z průběhů je patrná závislost průběhu magnetické indukce na vzájemné vzdálenosti Helmholtzových cívek. Je-li $a < R$, potom ve středu mezi cívkami můžeme vidět, že funkce $B_H(x)$ má maximum. Naopak pro $a > R$ má funkce $B_H(x)$ v daném místě minimum. V případě, že $a = R$, pak je pole na ose téměř konstantní. K určení přibližné hodnoty magnetické indukce pro případ, kdy $a = R$, provedeme Taylorův rozvoj výrazu (1.10) kolem bodu $x = 0$, přičemž budeme brát v úvahu pouze první tři členy, tj.

$$B_H \doteq B_H(0) + \left. \frac{dB_H}{dx} \right|_{x=0} x + \left. \frac{d^2 B_H}{dx^2} \right|_{x=0} \frac{x^2}{2}. \quad (1.11)$$



Obrázek 1.4: Průběh magnetické indukce v ose solenoidu ($I = 1$ A, $N = 300$ $R = 0,016$ m, $L = 0.162$ m).



Obrázek 1.5: Geometrická konfigurace k výpočtu magnetické indukce v ose Helmholtzových cívek.

Abychom mohli dosadit do jednotlivých členů Taylorova rozvoje, provedeme příslušné derivace výrazu (1.10)

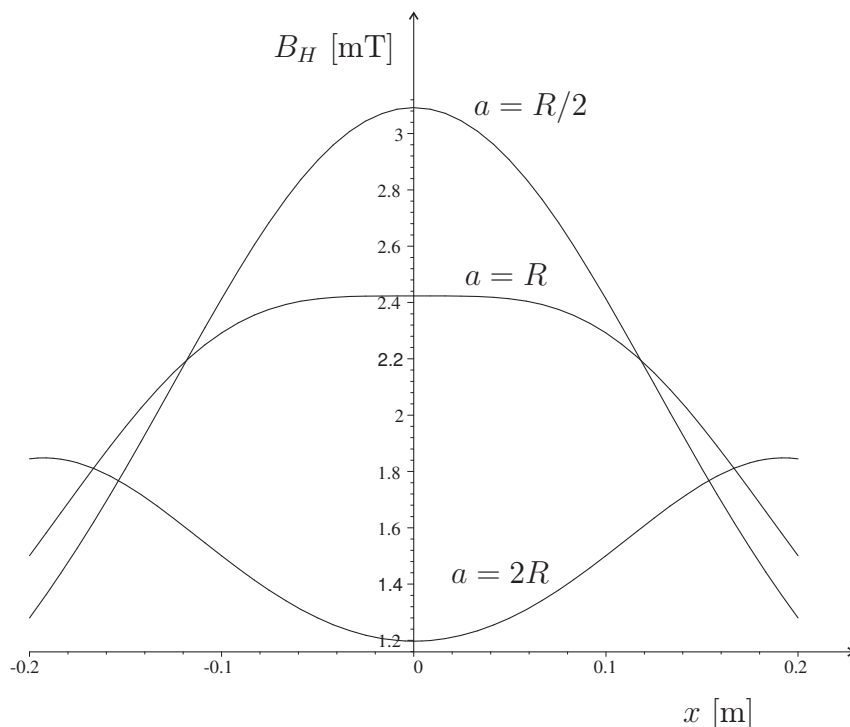
$$\frac{dB_H}{dx} = \frac{\mu_0 I R^2 N}{2} \left\{ \frac{-3(b+x)}{[R^2 + (b+x)^2]^{5/2}} + \frac{3(b-x)}{[R^2 + (b-x)^2]^{5/2}} \right\}, \quad \left. \frac{dB_H}{dx} \right|_{x=0} = 0. \quad (1.12)$$

$$\frac{d^2 B_H}{dx^2} = \frac{\mu_0 I R^2 N}{2} \left\{ \frac{5(b+x)^2}{[R^2 + (b+x)^2]^{7/2}} - \frac{3}{[R^2 + (b+x)^2]^{5/2}} \right\} + (1.13)$$

$$\left\{ \frac{5(b-x)^2}{[R^2 + (b-x)^2]^{7/2}} - \frac{1}{[R^2 + (b-x)^2]^{5/2}} \right\}, \quad \left. \frac{d^2 B_H}{dx^2} \right|_{x=0} = \frac{6\mu_0 I R^2 N}{2} \left[\frac{4b^2 - R^2}{(R^2 + b^2)^{7/2}} \right] \quad (1.14)$$

Jestliže bude platit následující podmínka

$$4b^2 - R^2 = 0. \quad (1.15)$$



Obrázek 1.6: Průběh magnetické indukce na ose mezi Helmholtzovými cívkami pro vzdálenosti $a = R/2, R, 2R$.

Aby byla tato podmínka splněna, musí platit, že

$$a = R. \quad (1.16)$$

Je-li splněna podmínka (1.16), potom dostáváme

$$B_H \doteq B_H(0) = \mu_0 I R^2 N \left[\frac{1}{(R^2 + \frac{R^2}{4})^{3/2}} \right] = \frac{\mu_0 I N}{R} \frac{1}{(1 + \frac{1}{4})^{3/2}}. \quad (1.17)$$

Ze vztahu (1.17) vyplývá, že v případě splnění podmínky (1.16) je magnetické pole okolo středu Helmholtzových cívek na ose přibližně konstantní.

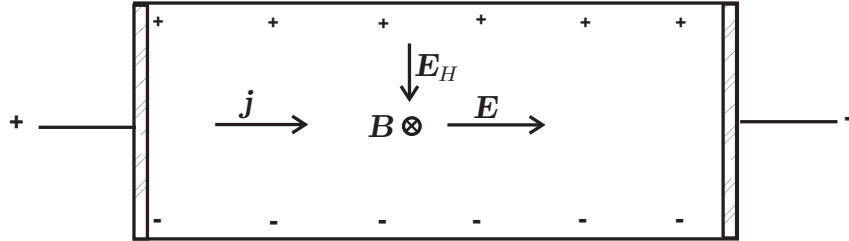
Hallův jev

K měření magnetické indukce používáme tzv. Hallovy sondy, která využívá k detekování magnetického pole tzv. Hallova jevu, který doprovází průchod elektrického proudu kovem či polovodičem (vzorkem), jsou-li vloženy do příčného magnetického pole. Geometrická konfigurace umožňující pozorování Hallova jevu je uvedena na obrázku 1.7. Vnější elektrické pole \mathbf{E} budí ve vzorku elektrický proud o hustotě \mathbf{j} . Přiložíme-li magnetické pole \mathbf{B} , pak budou nosiče náboje, pohybující se driftovou rychlostí, vychylovány vlivem magnetické Lorentzovy síly příslušným směrem (závisí na znamení neseného náboje) ke straně vzorku. Na obou stranách vzorku se tímto vytvoří stejné plošné hustoty náboje, ale s opačným znaménkem, takže vznikne elektrické pole \mathbf{E}_H , které na vzorku vytvoří příčné (Hallovo) napětí U_H . Náboje se na obou stranách vzorku hromadí do té doby, kdy se síly takto vzniklého pole, které působí na pohybující se náboje, přesně nevyruší se

střední magnetickou silou, takže ustálený proud teče horizontálně. Hallova intenzita E_H je úměrná proudové hustotě j a magnetické indukci B

$$E_H = R_H j B, \quad (1.18)$$

kde R_H je tzv. Hallova konstanta a představuje důležitou charakteristiku použitého vzorku. Tato konstanta nabývá pro různé materiály různých velikostí, ale i znamení. Znamení Hallovy konstanty souvisí s podílem děrové vodivosti příslušné látky.



Obrázek 1.7: Geometrická konfigurace studia Hallova jevu.

1.3 Postup měření

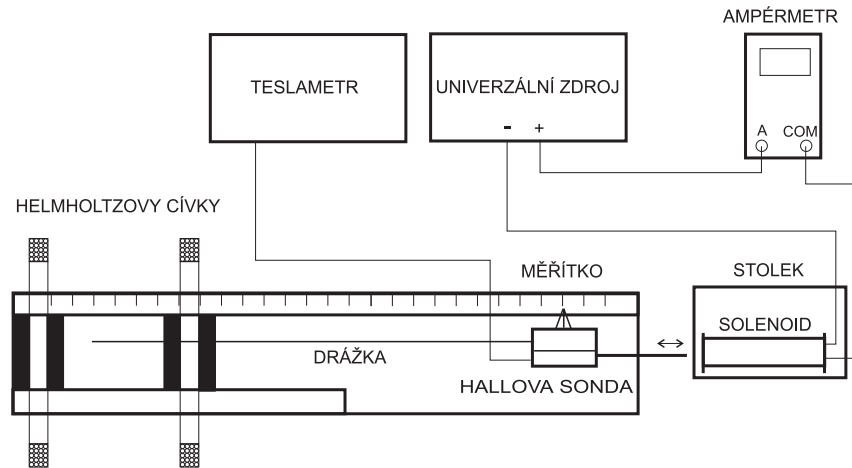
- Měření průběhu magnetické indukce uvnitř solenoidů
 1. Provedeme zapojení podle schématu 1.8.
 2. Měřený solenoid umístíme na posuvný stolek tak, aby jeho kostra zapadla do příslušných drážek.
 3. Změříme délku solenoidu² (délku závitů) a dále vzdálenost pravého konce solenoidu (závitů) od pravého konce kostry solenoidu.
 4. Nastavíme na univerzálním zdroji hodnotu napětí zhruba 17 V a proud protékající daným solenoidem na hodnotu 1 A (tato hodnota je nižší než maximální přípustná hodnota u měřených solenoidů), což kontrolujeme pomocí digitálního multimetru (ampérmetru).
 5. Připojíme Hallovu sondu k teslametru, u kterého zvolíme měření pro stejnosměrná pole (GLEICHFELD) a rozsah 20 a dále pomocí nulovacího potenciometru nastavíme při vypnutém zdroji nulovou hodnotu. Jestliže nulové hodnoty nejsme s to dosáhnout, použijeme nejdříve potenciometru kompenzačního, viz obr. 1.9, na kterém jsou popsány potřebné ovládací prvky. O správnosti nastavení nulové hodnoty na teslametru se přesvědčíme vždy před započítím měření u každého solenoidu.
 6. Hallovu sondu upevněnou do stojanu umístíme do středu solenoidu a prostrčíme ji na jeho druhý konec kostry solenoidu. Hodnoty magnetické indukce odečítáme přímo na teslametru, přičemž měření provedeme pro dostatečný počet bodů na ose solenoidu, abychom byli schopni změřit příslušnou závislost, tj. $B = B(x)$. Polohu Hallovy sondy odečítáme pomocí přiloženého měřítka,

²Délka kostry solenoidu není shodná s délkou solenoidu!

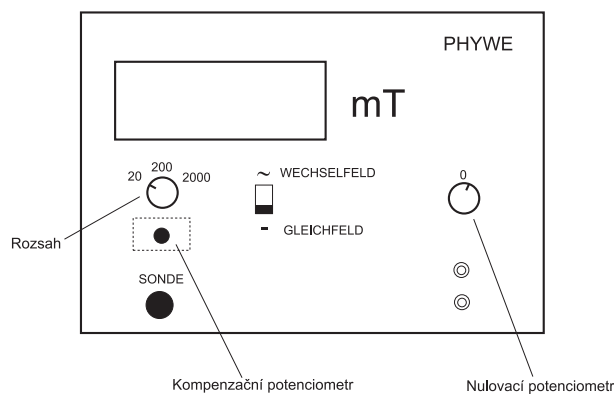
přičemž zaznamenáváme přímo ty hodnoty, na které ukazuje ryska od stojanu Hallovy sondy.

POZOR!!! Hallova sonda je velmi křehká, a proto s ní manipulujte s největší opatrností!

7. Všechny naměřené hodnoty vyneseme do grafu a proložíme je teoretickými průběhy. K sestavení grafů doporučujeme použít k tomuto účelu sestaveného skriptu na serveru HERODES!



Obrázek 1.8: Schéma pro měření magnetické indukce solenoidu.



Obrázek 1.9: Čelní pohled na teslametr.

- Měření magnetické indukce v ose Helmholtzových cívek pro jejich rozdílné vzdálenosti a ($a = R/2, R, 2R$).
 1. Nastavíme příslušnou vzdálenost Helmholtzových cívek a , přičemž se jedná o cívky s počtem závitů $N = 154$ a s poloměrem $R = 200$ mm. Potřebné vzdálenosti dosáhneme posunutím pravé z cívek tak, aby bílý trojúhelník ukazoval na měřítku požadovanou vzdálenost, tj. 100 ($R/2$), 200 (R) nebo 400 ($2R$) mm.
 2. Hallovu sondu i se stojanem posuneme do středu pravé cívky. Ukazatel na stojanu Hallovy sondy by měl ukazovat hodnotu na měřítku $a + 300$, tj. 400, 500 nebo 700 mm. Abychom umístili sondu správně do osy cívek, je možné k tomuto účelu použít hliníkového příložníku.

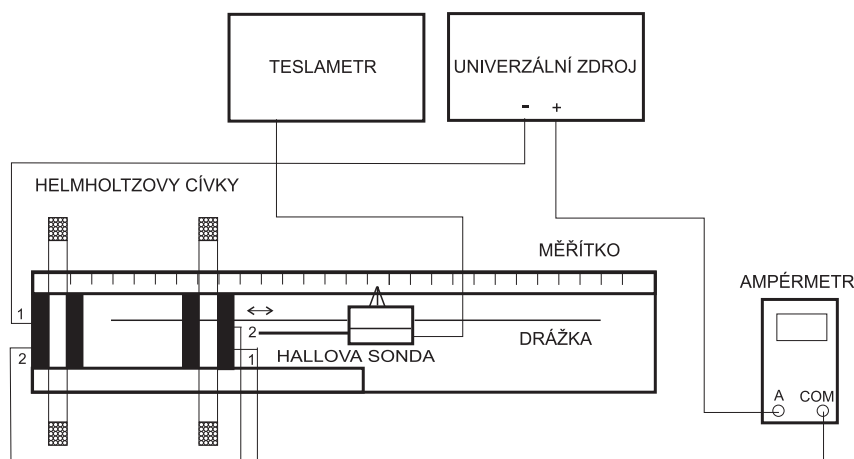
3. Provedeme zapojení dle schématu, viz obr. 1.10 a nezapomeneme zkontrolovat, zda teslametr ukazuje nulovou hodnotu při vypnutém zdroji. Není-li tomu tak, potom postupujeme dle návodu popsaného výše.
4. Proud cívkami nastavíme na hodnotu 3 A.
Pozor!!! Proud Helmholtzovými cívkami by neměl překročit hodnotu 3,5 A!
5. Změříme hodnoty magnetické indukce pro různé body na ose pomocí Hallovy sondy. Polohu Hallovy sondy odečítáme opět přímo z měřítka pomocí ukazatele (rysky) umístěného na stojanu sondy.
6. Naměřené hodnoty vyneseme do grafu, přičemž je proložíme teoretickými průběhy. Opět i v tomto případě doporučujeme použít k tomuto účelu sestaveného skriptu na serveru HERODES!

1.4 Použité přístroje

Hallova sonda, digitální teslametr, digitální multimetr (ampérmetr), univerzální zdroj, nastavitelný stolek, sada solenoidů, Helmholtzovy cívky, měřítko, posuvka, stojan, propojovací kabely.

1.5 Kontrolní otázky

1. Jak můžeme matematicky formulovat Biotův-Savartův zákon?
2. Co je to solenoid?
3. Co je to Hallův jev?
4. Za jaké podmínky můžeme považovat magnetické pole mezi osami Helmholtzových cívek za konstantní?



Obrázek 1.10: Schéma pro měření magnetické indukce Helmholtzových cívek.

1.6 Literatura

- [1] Sedlák, B., Štoll, I.: Elektřina a magnetismus, Academia, Praha 2002.
- [2] Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M.: Feynmanovy přednášky z fyziky - 3. díl, FRAGMENT, Praha 2002.
- [3] University laboratory experiments-Physics, Goettingen, 1994.
- [4] Hajko, V. a kol.: Fyzika v příkladech, Alfa, Bratislava 1983.
- [5] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.: Fyzika, VUTIUM-PROMETHEUS, Brno, 2000.