Laboratorní úloha

Stanovení měrného náboje elektronu

1.1 Úkol měření

Ze zakřivení drah elektronů pohybujících se v magnetickém poli stanovte měrný náboj elektronu.

1.2 Teoretický úvod – pohyb nabité částice v elektrickém a magnetickém poli

1.2.1 Lorentzova síla

Na nabitou částici s nábojem q, pohybující se v elektrickém poli o intenzitě $\boldsymbol{E}$ a magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$ rychlostí $\mathbf{v}$, působí tzv. *Lorentzova síla*, kterou můžeme popsat pomocí vzorce

$$\boldsymbol{F} = q\left[\boldsymbol{E} + (\mathbf{v} \times \boldsymbol{B})\right]. \tag{1.1}$$

Omezíme-li se na nerelativistické rychlosti, kdy platí $v = |\mathbf{v}| \ll c$, kde c je rychlost světla ve vakuu, můžeme pro částici psát pohybovou rovnici

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = q\left[\boldsymbol{E} + (\mathbf{v} \times \boldsymbol{B})\right], \tag{1.2}$$

kde m je hmotnost částice a $\boldsymbol{r}$ její polohový vektor. Řešení rovnice (1.2) můžeme najít za předpokladu, že známe počáteční podmínky v nějakém (třeba nulovém) čase například ve tvaru

$$\boldsymbol{r}(t=0) = \boldsymbol{r}_0, \qquad \mathbf{v}(t=0) = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \mathbf{v}_0. \tag{1.3}$$

1.2.2 Pohyb částice v homogenním elektrickém poli

Jestliže platí $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$, přejde rovnice (1.2) do tvaru

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{E}. \tag{1.4}$$

Jestliže je elektrické pole homogenní, platí $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{konst.}$, takže můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{q\boldsymbol{E}}{m} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \int \frac{q\boldsymbol{E}}{m}\mathrm{d}t = \frac{q\boldsymbol{E}}{m}t + \boldsymbol{C}_1,$$

kde integrační konstantu[1] určíme z počáteční podmínky (1.3) jako $\boldsymbol{C}_1 = \mathbf{v}_0$, takže pro rychlost částice platí

$$\mathbf{v} = \frac{q\boldsymbol{E}}{m}t + \mathbf{v}_0. \tag{1.5}$$

Velikost rychlosti částice se s časem mění, pakliže vektory $\boldsymbol{E}$ a $\mathbf{v}_0$ jsou lineárně nezávislé, jedná se o pohyb křivočarý, jsou-li lineárně závislé, jedná se o pohyb přímočarý.

Integrací vztahu (1.5) obdržíme závislost polohového vektoru na čase jako

$$\boldsymbol{r} = \int \mathbf{v}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{q\boldsymbol{E}}{m}t^2 + \mathbf{v}_0 t + \boldsymbol{C}_2,$$

kde integrační konstantu určíme pomocí počáteční podmínky (1.3) jako $\boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{r}_0$, takže dostaneme

$$\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\frac{q\boldsymbol{E}}{m}t^2 + \mathbf{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0. \tag{1.6}$$

1.2.3 Pohyb částice v homogenním magnetickém poli

Bude-li platit $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$, můžeme pohybovou rovnici (1.2) psát ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{m}\mathbf{v} \times \boldsymbol{B}. \tag{1.7}$$

Bude-li dále platit, že magnetické pole je homogenní, tedy $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{konst}.$, můžeme bez újmy na obecnosti natočit souřadnicovou soustavu tak, aby osa z mířila ve směru vektoru magnetické indukce, tedy aby platilo $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$, kde $B > 0$. Potom můžeme vektorový součin v rovnici (1.7) vyjádřit jako

$$\mathbf{v} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = v_y B\boldsymbol{i} - v_x B\boldsymbol{j},$$

takže soustavu (1.7) můžeme zapsat ve složkách

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{qB}{m}v_y, \qquad \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\frac{qB}{m}v_x, \qquad \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{1.8}$$

Třetí z rovnic (1.8) je nezávislá na prvních dvou a vyplývá z ní, že z-ová složka vektoru rychlosti (složka rychlosti ve směru vektoru magnetické indukce) se s časem nemění a proto platí

$$v_z = v_{z0}, \qquad z = v_{z0}t + z_0. \tag{1.9}$$

Řešení soustavy první a druhé rovnice (1.8) najdeme nejsnáze následujícím trikem. Zavedeme komplexní rychlost $\hat{v} = v_x + \mathrm{j}v_y$, druhou z rovnic (1.8) vynásobíme imaginární jednotkou a přičteme k rovnici první. Dostaneme tak

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{qB}{m}(v_y - \mathrm{j}v_x) = -\mathrm{j}\frac{qB}{m}\hat{v} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\hat{v}}{\mathrm{d}t} + \mathrm{j}\omega_\mathrm{c}\hat{v} = 0, \tag{1.10}$$

kde

$$\omega_\mathrm{c} = \frac{qB}{m} \tag{1.11}$$

[1] Ve skutečnosti se jedná o konstantní vektor.

je takzvaná cyklotronová frekvence. Snadno se přesvědčíme přímým dosazením, že rovnice (1.10) má řešení

$$\hat{v} = \hat{C}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_\mathrm{c} t},$$

kde $\hat{C}$ je integrační konstanta, kterou najdeme dosazením počáteční podmínky $\hat{v}(t=0) = v_{x_0} + \mathrm{j}v_{y0}$ do předchozího vztahu jako $\hat{C} = v_{x_0} + \mathrm{j}v_{y0}$, takže můžeme psát

$$\hat{v} = v_x + \mathrm{j}v_y = (v_{x0} + \mathrm{j}v_{y0})\left(\cos\omega_\mathrm{c} t - \mathrm{j}\sin\omega_\mathrm{c} t\right).$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí na levé a pravé straně předchozího vstahu dostaneme

$$\begin{aligned} v_x &= v_{x0}\cos\omega_\mathrm{c} t + v_{y0}\sin\omega_\mathrm{c} t, \\ v_y &= v_{y0}\cos\omega_\mathrm{c} t - v_{x0}\sin\omega_\mathrm{c} t. \end{aligned}$$

Zavedeme-li velikost složky vektoru počáteční rychlosti kolmé k vektoru magnetické indukce jako

$$v_{\perp 0} = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2},$$

můžeme předchozí vztahy formálně upravit do tvaru

$$v_x = v_{\perp 0}\left(\frac{v_{x0}}{v_{\perp 0}}\cos\omega_\mathrm{c} t + \frac{v_{y0}}{v_{\perp 0}}\sin\omega_\mathrm{c} t\right) = v_{\perp 0}\left(\cos\omega_\mathrm{c} t\cos\delta + \sin\omega_\mathrm{c} t\sin\delta\right). \tag{1.12a}$$

$$v_y = v_{\perp 0}\left(\frac{v_{y0}}{v_{\perp 0}}\cos\omega_\mathrm{c} t - \frac{v_{x0}}{v_{\perp 0}}\sin\omega_\mathrm{c} t\right) = v_{\perp 0}\left(\cos\omega_\mathrm{c} t\sin\delta - \sin\omega_\mathrm{c} t\cos\delta\right). \tag{1.12b}$$

kde jsme zavedli

$$\cos\delta = \frac{v_{x0}}{v_{\perp 0}}, \qquad \sin\delta = \frac{v_{y0}}{v_{\perp 0}} \qquad \Rightarrow \qquad \tan\delta = \frac{v_{y0}}{v_{x0}}.$$

S využitím součtových vzorců pro goniometrické funkce můžeme vztahy (1.12) přepsat do tvaru

$$v_x = v_{\perp 0}\cos(\omega_\mathrm{c} t - \delta), \qquad v_y = -v_{\perp 0}\sin(\omega_\mathrm{c} t - \delta). \tag{1.13}$$

Ze vztahů (1.9) a (1.13) pro velikost rychlosti částice plyne

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{v_{\perp 0}^2 + v_{z0}^2} = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2 + v_{z0}^2} = v_0 = konst.,$$

velikost rychlosti částice se v homogenním magnetickém poli nemění, mění se pouze směr rychlosti. Integrací vztahů (1.13) dostaneme x-ovou a y-ovou složku polohového vektoru částice jako

$$\begin{aligned} x &= \int v_x \mathrm{d}t = \frac{v_{\perp 0}}{\omega_\mathrm{c}}\sin(\omega_\mathrm{c} t - \delta) + C_x, \\ y &= \int v_y \mathrm{d}t = \frac{v_{\perp 0}}{\omega_\mathrm{c}}\cos(\omega_\mathrm{c} t - \delta) + C_y. \end{aligned}$$

Zavedeme-li novou veličinu

$$R_\mathrm{c} = \frac{v_{\perp 0}}{\omega_\mathrm{c}} = \frac{m v_{\perp 0}}{qB}, \tag{1.14}$$

můžeme po nalezení integračních konstant z počátečních podmínek popsat trajektorii částice v homogenním magnetickém poli parametrickými rovnicemi

$$x = R_\mathrm{c}\sin(\omega_\mathrm{c} t - \delta) + R_\mathrm{c}\sin\delta + x_0, \tag{1.15a}$$

$$y = R_\mathrm{c}\cos(\omega_\mathrm{c} t - \delta) - R_\mathrm{c}\cos\delta + y_0. \tag{1.15b}$$

$$z = v_{z0} t + z_0. \tag{1.15c}$$

Z rovnic (1.15) vyplývá, že nabitá částice se v homogenním magnetickém poli pohybuje podél indukčních čar po šroubovici o poloměru $|R_\mathrm{c}|$, který nazýváme cyklotronovým poloměrem.

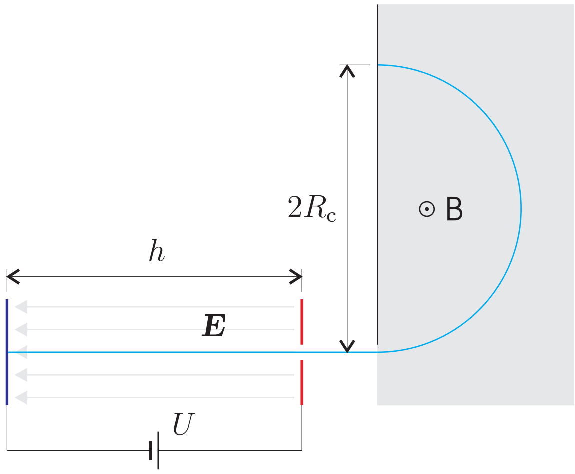
Pokud nabitá částice vlétne do magnetického pole kolmo k vektoru magnetické indukce a platí tedy $v_{z0} = 0$, pohybuje se dále po kružnici o poloměru $|R_\mathrm{c}|$ s periodou $T_\mathrm{c} = 2\pi/\omega_\mathrm{c}$.

1.3 Experiment

1.3.1 Princip

Měrný náboj elektronu je možné stanovit následujícím způsobem, viz obrázek 1.1. Ze žhavené elektrody (katody) se nechají emitovat elektrony, které jsou následně urychlovány směrem ke kladné elektrodě. Předpokládejme, že mezi planparalelními elektrodami se vzájemnou vzdáleností h je homogenní elektrické pole, pro velikost jehož intenzity platí $E = U/h$, kde U je napětí mezi elektrodami. Jestliže je počáteční rychlost emitovaného elektronu malá, bude se v elektrickém poli pohybovat přímočaře proti směru intenzity elektrického pole. Pro velikost rychlosti a prošlé vzdálenosti na čase bude platit, viz vztahy (1.5) a (1.6)

$$v = \frac{eE}{m_\mathrm{e}}t, \qquad s = \frac{1}{2}\frac{eE}{m_\mathrm{e}}t^2,$$



Obrázek 1.1: Schematické uspořádání experimentu.

kde e je kladně braný náboj elektronu a m_e je jeho hmotnost. Elektron tedy dorazí k anodě (po té, co rovnoměrně zrychleným pohybem urazil vzdálenost h) v čase

$$t_h = \sqrt{\frac{2hm_\mathrm{e}}{eE}},$$

takže pro velikost jeho rychlosti v tomto okamžiku pplatí

$$v = \frac{eE}{m_\mathrm{e}}t_h = \sqrt{\frac{2ehE}{m_\mathrm{e}}} = \sqrt{\frac{2eU}{m_\mathrm{e}}}.$$

Po té, co elektron prolétne otvorem v anodě, pohybuje se rovnoměrně přímočaře (elektrické pole je soustředěno mezi elektrodami), dokud nevlétne *kolmo* do homogenního magnetického pole s magnetickou indukcí o velikosti B. V magnetickém poli se pohybuje po části kruhové trajektorie, pro jejíž (cyklotronový) poloměr, viz vztah (1.14), platí

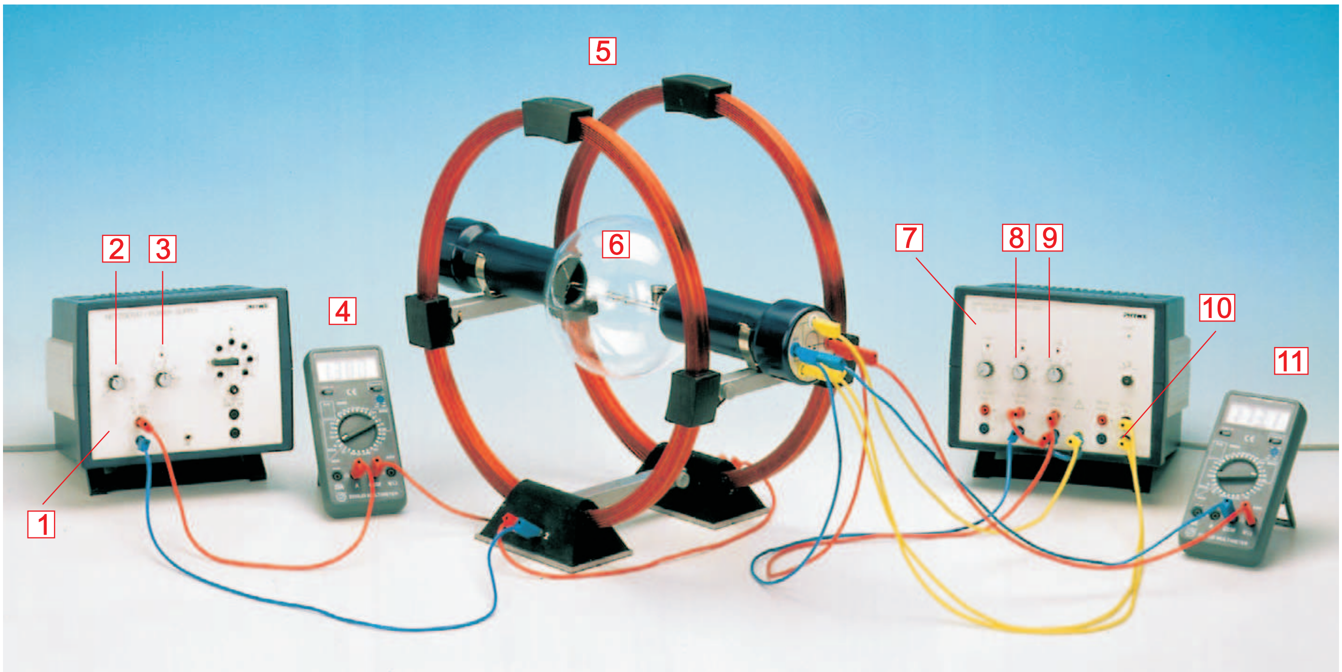
$$R_\mathrm{c} = \frac{m_\mathrm{e}v}{eB} = \sqrt{\frac{2m_\mathrm{e}U}{eB^2}},$$

odkud změřením poloměru trajektorie (cyklotronového poloměru) můžeme určit velikost měrného náboje e/m_e jako

$$\frac{e}{m_\mathrm{e}} = \frac{2U}{B^2R_\mathrm{c}^2}. \tag{1.16}$$

1.3.2 Experimentální sestava

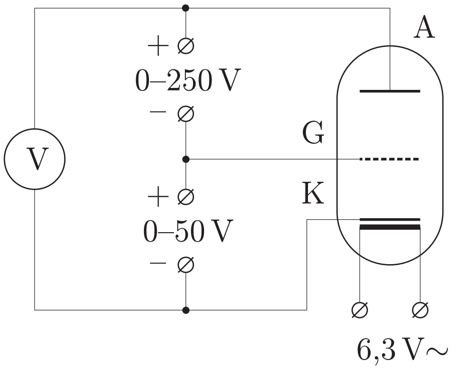
Experimentální sestava pro stanovení měrného náboje elektronu je zachycena na obrázku 1.2. Svazek elektronů je emitován elektronovou tryskou v baňce $\boxed{6}$ naplněné argonem (tlak cca 0,1 Pa). Při srážkách urychlených elektronů s atomy argonu dochází k jejich ionizaci, při rekombinaci takto vznikajících iontů na neutrální atomy dochází k vyzáření fotonů, takže elektronový svazek je možné v baňce pozorovat.



Obrázek 1.2: Uspořádání experimentu: $\boxed{1}$ – zdroj pro napájení Helmholtzových cívek, $\boxed{2}$ – regulátor napětí, $\boxed{3}$ – omezovač proudu, $\boxed{4}$ – ampérmetr pro měření proudu Helmholtzovými cívkami, $\boxed{5}$ – Helmhholtzovy cívky, $\boxed{6}$ – baňka naplněná argonem s elektronovou tryskou, $\boxed{7}$ – zdroj nízkého napětí pro napájení elektronové trysky, $\boxed{8}$ – potenciometr pro nastavení mřížkového napětí 0–50 V, $\boxed{9}$ – potenciometr pro nastavení anodového napětí 0–300 V, $\boxed{10}$ – výstup 6,3 V∼ pro žhavení katody, $\boxed{11}$ – voltmetr pro měření urychlovacího napětí.

Rychlost elektronů lze nastavovat prostřednictvím urychlovacího napětí U, které je součtem napětí mřížkového (nastavuje se v intervalu 0–50 V potenciometrem $\boxed{8}$) a napětí anodového (nastavuje se v intervalu 0–250 V potenciometrem $\boxed{9}$), viz obrázek 1.3. Katoda elektronové trysky, je žhavena střídavým napětím 6,3 V.

Magnetické pole, v němž se nechává elektronový svazek zakřivovat, se vytváří v ose Helmholtzových cívek (obr. 1.2, $\boxed{5}$). Jedná se o dvě stejné souosé cívky, jimiž protéká stejný proud stejným směrem. Dá se ukázat, viz dodatek, že pokud je vzájemná vzdálenost cívek rovna jejich poloměru, je vektor magnetické indukce v ose cívek přibližně konstantní a pro jeho velikost platí



Obrázek 1.3: Napájení elektronové trysky.

$$B \approx B_0 = \frac{8}{5\sqrt{5}} \frac{\mu_0 N I}{a}, \qquad (1.17)$$

kde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N{\cdot}A^{-2}}$ je magnetická konstanta, N je počet závitů každé z cívek (v tomto případě $N = 154$), I je velikost proudu protékaného cívkami a a je jejich poloměr (v tomto případě $a = 200\,\mathrm{mm}$). Helmholtzovy cívky fungují správně pouze tehdy, pokud jimi protéká proud stejným směrem (v opačném případě je magnetická indukce v jejich středu nulová). Proud Helmholtzovými cívkami se nastavuje pomocí omezovače proudu $\boxed{3}$ na zdroji malého napětí $\boxed{1}$, čímž se zamezí jeho poklesu při zahřátí cívek. Výstupní napětí je třeba potenciometrem $\boxed{2}$ nastavit na maximální hodnotu.

Pokud urychlené elektrony vletují do magnetického pole kolmo, pohybují se po kruhových trajektoriích, které lze v baňce pozorovat. Pokud má trajektorie tvar šroubovice, je třeba baňku pootočit podél její osy tak, aby trajektorie byly kruhové. Poloměry trajektorií se neměří, ale nastavují. V baňce jsou ve vzdálenostech $l = 4$, 6, 8 a 10 cm od elektronové trysky umístěny příčky opatřené luminoforem, pokud svazek elektronů na danou příčku dopadne, ta se rozsvítí a cyklotronový poloměr (poloměr kruhové trajektorie) **je roven polovině vzdálenosti** l.

1.3.3 Bezpečnost při měření

Urychlovací napětí u elektronové trysky může mít velikost až 300 V. Z tohoto důvodu obvod napájení baňky nerozpojujte a nijak s ním nemanipulujte. **O zapnutí a vypnutí úlohy požádejte vyučujícího**.

1.3.4 Postup měření

1. Před zapnutím napájecího zdroje elektronové trysky $\boxed{7}$ musí být potenciometry $\boxed{8}$ a $\boxed{9}$ nastaveny na minimální (nulovou) hodnotu.

2. Požádejte vyučujícího o zapnutí úlohy.

3. Po zapnutí napájecího zdroje $\boxed{7}$ je třeba nechat katodu elektronové trysky cca 2 minuty žhavit, než začnete zvyšovat urychlovací napětí. Tím se šetří životnost katody elektronové trysky.

4. Pro různá urychlovací napětí U (experiment dobře funguje pro napětí větší než cca 100 V) najděte takové proudy Helmholtzovými cívkami (a tedy magnetickou indukci), kdy elektrony dopadají na luminiscenční příčky, tj., kdy lze určit cyklotronový poloměr jejich trajektorií. Měření proveďte alespoň šestnáctkrát.

5. Pro jednotlivé kombinace nastavených a naměřených hodnot vypočtěte[2] pomocí vzorce (1.16) měrný náboj elektronu. Z vypočtených hodnot určete aritmetický průměr a nejistotu měření (metoda redukce).

6. Po té co doměříte, nastavte potenciometry zdroje anodového a mřížkového napětí na minimum – šetříme tím životnost katody elektronové trysky. Požádejte vyučujícího o vypnutí úlohy.

1.4 Použitá literatura

1. B. Sedlák, I. Štoll: Elektřina a magnetismus, *Academia*, Praha, 2002.

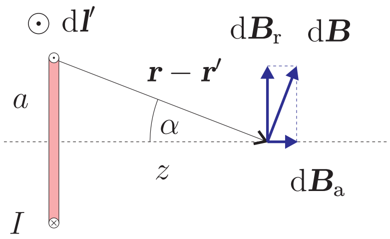
2. David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall, New Yersey, 1999.

[2] K tomuto účelu se velmi hodí použít tabulkový kalkulátor (spreadsheet).

1.5 Dodatek

1.5.1 Magnetické pole v ose kruhové smyčky

K výpočtu magnetické indukce v ose kruhové smyčky použijeme Biotova-Savartova-Laplaceova zákona. Nechť má smyčka poloměr a a protéká jí proud I.



Element smyčky d$\boldsymbol{l}'$ vytváří na ose smyčky magnetickou indukci

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}' \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3},$$

kde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N{\cdot}A^{-2}}$ je magnetická konstanta. Pro velikost elementu magnetické indukce s ohledem na kolmost násobených vektorů platí

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I \mathrm{d}l'}{4\pi(a^2+z^2)}.$$

Pro velikost axiální složky tohoto vektoru zřejmě platí

$$\mathrm{d}B_z = \mathrm{d}B \sin\alpha = \frac{\mu_0 I a \mathrm{d}l'}{4\pi(a^2+z^2)^{3/2}}.$$

Jelikož elementární vektor d$\boldsymbol{B}_z$ je pro všechny elementy smyčky stejný, bude pro velikost axiální složky vektoru magnetické indukce platit

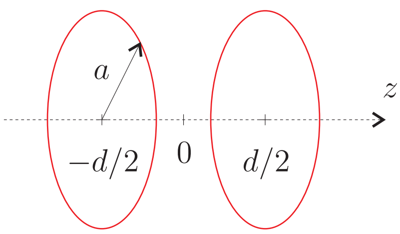
$$B_z = \oint_{\mathcal{L}} \frac{\mu_0 I a \mathrm{d}l'}{4\pi(a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi(a^2+z^2)^{3/2}} \oint_{\mathcal{L}} \mathrm{d}l' = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}.$$

Poněvadž radiální složka vektoru magnetické indukce v ose smyčky je z důvodu symetrie nulová, má vektor magnetické indukce axiální směr a pro jeho velikost platí $B = B_z$.

Pokud by smyčka měla celkem N závitů, bude celkový proud protékající smyčkou roven NI, takže s využitím principu superpozice (magnetická indukce je lineární funkcí proudu) můžeme pro magnetickou indukci v ose této smyčky psát

$$B = \frac{\mu_0 N I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}. \tag{1.18}$$

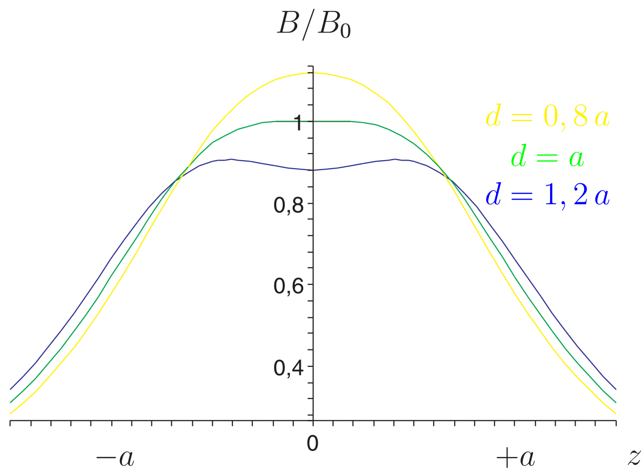
1.5.2 Helmholtzovy cívky



Helmholtzovy cívky jsou tvořeny dvěma stejnými souosými kruhovými smyčkami poloměru a, každá po N závitech, kterými *stejným směrem* protéká stejný proud I. Pokud jsou tyto smyčky umístěny ve vzájemné vzdálenosti $d = a$, je magnetické pole v ose mezi smyčkami zhruba homogenní. Toto tvrzení ukážeme v následujícím odstavci.

Střed osy z (osy symetrie) umístíme doprostřed mezi cívky, viz obrázek. Pro magnetickou indukci na ose symetrie tedy můžeme vzhledem ke vztahu (1.18) psát

$$B = \frac{\mu_0 N I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{[a^2+(z-d/2)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[a^2+(z+d/2)^2]^{3/2}} \right\}.$$



Obrázek 1.4: Magnetická indukce v ose Helmholtzových cívek pro různé vzdálenosti d.

Je zřejmé, že čím bude pole mezi smyčkami méně závislé na souřadnici z (čím bude „homogennější“), tím menších hodnot budou nabývat derivace magnetické indukce podle z. Pro první derivaci platí

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z} = -\frac{3\mu_0 N I a^2}{2}\left\{\frac{z-d/2}{[a^2+(z-d/2)^2]^{5/2}} + \frac{z+d/2}{[a^2+(z+d/2)^2]^{5/2}}\right\},$$

přičemž zřejmě platí $\mathrm{d}B/\mathrm{d}z = 0$ pro $z = 0$ (symetrie). Pro druhou derivaci můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{3\mu_0 N I a^2}{2}\left\{\frac{a^2-4(z-d/2)^2}{[a^2+(z-d/2)^2]^{7/2}} + \frac{a^2-4(z+d/2)^2}{[a^2+(z+d/2)^2]^{7/2}}\right\}.$$

Pro $z = 0$ platí

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}z^2}\right|_{z=0} = 3\mu_0 N I a^2 \frac{d^2-a^2}{(a^2+d^2/4)^{7/2}}.$$

Druhá derivace je tedy nulová, pokud vzdálenost smyček je rovna jejich poloměru. Pro velikost magnetické indukce v ose mezi smyčkami pak platí

$$B \approx B_0 = \frac{8}{5\sqrt{5}}\frac{\mu_0 N I}{a}. \tag{1.19}$$

29. ledna 2013, Milan Červenka, *milan.cervenka@fel.cvut.cz*