

## Laboratorní úloha

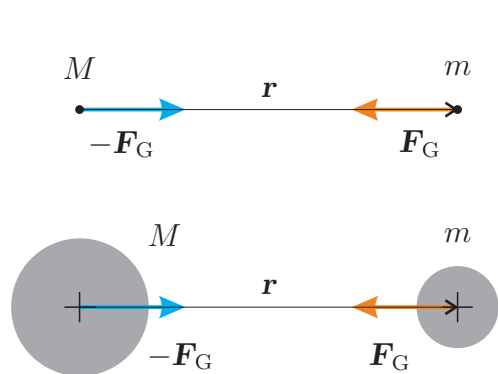
# Studium volného pádu a měření tíhového zrychlení

## 1.1 Úkol měření

1. Změřte závislost doby pádu na výšce pro dvě ocelové kuličky různého průměru.
2. Pro obě kuličky zpracujte graf závislosti výšky na době pádu, vypočtete tíhové zrychlení a jeho nejistotu a výsledky porovnejte s místní hodnotou tíhového zrychlení pro Prahu.

## 1.2 Teoretický úvod

### 1.2.1 Gravitační zákon



Podle Newtonova gravitačního zákona je velikost gravitační síly, kterou na sebe působí dva hmotné body, přímo úměrná součinu jejich hmotností a nepřímo úměrná druhé mocnině jejich vzdálenosti. Pomocí vzorce můžeme psát

$$F_G = G \frac{mM}{r^2}, \quad (1.1)$$

kde  $m$ ,  $M$  jsou hmotnosti hmotných bodů,  $r$  je jejich vzájemná vzdálenost a  $G$ , konstanta úměrnosti, je experimentálně určená gravitační konstanta

Obrázek 1.1: K gravitačnímu zákonu.

$$G = (6,674\,08 \pm 0,000\,31) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Gravitační síla je přitažlivá, zavedeme-li  $\mathbf{F}_G$  jako vektor síly, kterým působí bod o hmotnosti  $M$  na bod o hmotnosti  $m$ , můžeme vzorec (1.1) přepsat do tvaru

$$\mathbf{F}_G = -G \frac{mM}{r^2} \mathbf{r}_0 = -G \frac{mM}{r^3} \mathbf{r}, \quad (1.2)$$

kde  $\mathbf{r}$  je polohový vektor bodu o hmotnosti  $m$  vzhledem k bodu o hmotnosti  $M$  a  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}/r$  je příslušný jednotkový vektor. Podle zákona akce a reakce platí pro sílu  $\mathbf{F}'_G$ , kterou působí bod o hmotnosti  $m$  na bod o hmotnosti  $M$  vztah  $\mathbf{F}'_G = -\mathbf{F}_G$ .

Vztah (1.2) platí přesně pro hmotné body. Pro rozlehlá tělesa je třeba příslušný vztah najít rozložením objemů těles na nekonečně malé elementy a „sečíst“ jednotlivé elementární příspěvky

pomocí integrálu. Dá se (pracně ale přímočaře) ukázat, že vztah (1.2) platí přesně i pro koule o hmotnostech  $M$  a  $m$  se sféricky-symetricky rozloženou hmotou, polohový vektor  $\mathbf{r}$  je pak definován pomocí geometrických středů koulí. Vztah (1.2) platí i pro sílu působící mezi koulí a hmotným bodem.

## 1.2.2 Tíhové pole Země

V tomto odstavci postupně prozkoumáme pohyb tělesa v poli Země a pro názornost tak postupně učiníme v několika přiblíženích, která budeme postupně zpřesňovat.

### Země jako nerotující koule

Předpokládejme nejdříve, že Země je koule o poloměru  $R_Z$ , hmotnosti  $M = M_Z$ , se sféricky symetricky rozloženou hmotou a předpokládejme nejdříve, že nerotuje kolem své osy. Budeme dále předpokládat, že těleso o hmotnosti  $m$ , jehož pohyb budeme zkoumat, je vzhledem k Zemi natolik malé, že jej můžeme považovat za hmotný bod a že platí  $m \ll M_Z$ . Zanedbáme-li vliv atmosféry<sup>1</sup>, bude jedinou silou působící na toto volně se pohybující těleso gravitační síla  $\mathbf{F}_G$  daná vzorcem (1.2).

Pohyb tělesa můžeme vyřešit dosazením gravitační síly do II. Newtonova pohybového zákona, čímž dostaneme pohybovou rovnici

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_G \quad \Rightarrow \quad m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -G \frac{mM_Z}{r^3} \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + G \frac{M_Z}{r^3} \mathbf{r} = 0, \quad (1.3)$$

k jejímuž řešení potřebujeme znát počáteční podmínky (pro polohový vektor a jeho derivaci – vektor rychlosti) v nějakém čase  $t_0$ . Z rovnice (1.3) je ihned vidět, že pohyb tělesa volně se pohybujícího v gravitačním poli nezávisí na jeho hmotnosti  $m$ .

Přesné analytické řešení rovnice (1.3) je sice známé<sup>2</sup>, ale pro řešení mnoha praktických problémů je zbytečně komplikované. Komplikovanost řešení rovnice (1.3) je zapříčiněna „složitou funkční závislostí“ vztahu pro gravitační sílu (1.2) – její velikost není konstantní (klesá s druhou mocninou vzdálenosti  $r$ ) a konstantní není ani její směr (míří do geometrického středu koule).

Situace se výrazně zjednoduší, pokud se omezíme na popis pohybu v omezeném prostoru v blízkosti povrchu Země. Zavedeme-li v daném místě na Zemi lokální kartézské souřadnice tak, že kladný směr osy  $z$  míří ve směru jednotkového vektoru  $\mathbf{r}_0$  a osa  $z$  má nulovou hodnotu na povrchu Země, můžeme pro  $z$ -ovou složku vektoru gravitační síly psát

$$F_{Gz} = -G \frac{mM_Z}{(R_Z + z)^2}. \quad (1.4)$$

Tento vztah popisuje, jak klesá velikost gravitační síly se vzdáleností  $z$  od povrchu Země. Pro malé vzdálenosti  $z$  můžeme vzorec (1.4) aproximovat Taylorovým rozvojem se středem v bodu  $z = 0$  jako

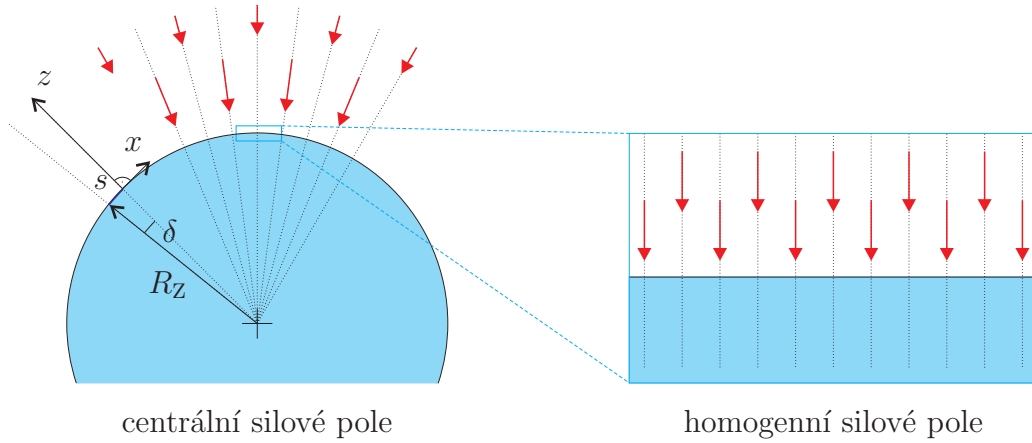
$$F_{Gz} = -\frac{GmM_Z}{R_Z^2} \left[ 1 - 2\frac{z}{R_Z} + 3\left(\frac{z}{R_Z}\right)^2 - \dots \right]. \quad (1.5)$$

Omezíme-li se tedy na malé výšky  $z$  (v porovnání s poloměrem Země), můžeme členy v hranaté závorce zanedbat oproti jedničce a psát

$$F_{Gz} \approx -ma_g, \quad \text{kde} \quad a_g = \frac{GM_Z}{R_Z^2}, \quad (1.6)$$

<sup>1</sup>Atmosféra se projevuje dvojitým způsobem; jednak těleso nadlehčuje díky vztlaku a jednak brzdí jeho pohyb působením odporové síly.

<sup>2</sup>Jedná se o tzv. Keplerovu úlohu, z jejíhož řešení vyplývá, že tělesa se v centrálním silovém poli pohybují po kuželosečkových trajektoriích.



Obrázek 1.2: Aproximace centrálního pole polem homogenním.

kde  $a_g$  je velikost gravitačního zrychlení na povrchu Země. Dosadíme-li za gravitační konstantu, hmotnost Země  $M_Z = 5,97219 \times 10^{24}$  kg a rovníkový poloměr Země  $R_Z = R_r = 6378,14$  km, dostaneme  $a_g = 9,7980 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

Rozdíl mezi vztahy (1.5) a (1.6) roste s rostoucí výškou  $z$ , ponecháním druhého členu v hranaté závorce ve vztahu (1.5) snadno zjistíme, že velikost gravitačního zrychlení v blízkosti povrchu Země klesá s rychlostí cca  $0,003 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  na každý kilometr.

Jelikož gravitační síla míří do středu Země, svírají vertikály (lokální osy  $z$ ) v různých místech na povrchu Země navzájem nenulový úhel  $\delta$ , pro který platí

$$\delta = \frac{s}{R_Z},$$

kde  $s$  je vzdálenost (délka oblouku) daných míst na povrchu Země (aproximované jako koule), viz obrázek 1.2. Dosazením do tohoto vztahu snadno zjistíme, že úhel, který vertikály navzájem svírají činí cca  $0,54'$  na každý kilometr vzdálenosti, jinými slovy, blízké vertikály jsou víceméně navzájem rovnoběžné, viz obrázek 1.2.

Proto můžeme za pomoci lokálních kartézských souřadnic na povrchu Země nahradit centrální gravitační pole homogenním polem a gravitační sílu (1.2) nahradit (aproximovat) vztahem

$$\mathbf{F}_{\text{Gh}} = m\mathbf{a}_g \quad \text{kde} \quad \mathbf{a}_g = [0, 0, -a_g], \quad (1.7)$$

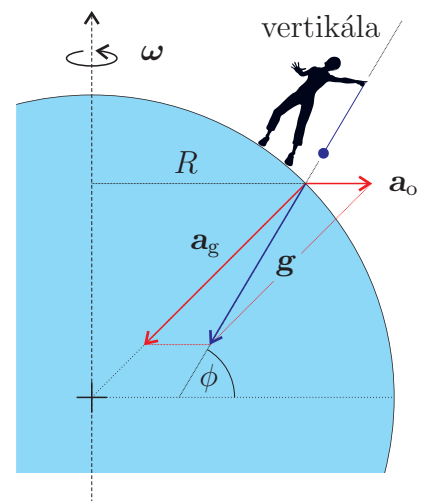
kde  $a_g$  je definováno vztahem (1.6).

### Země jako rotující koule

Vezmeme-li v úvahu, že Země se otáčí kolem své osy (s periodou  $T = 1$  hvězdný den<sup>3</sup>), tak vztažná soustava pevně spojená se Zemí je nutně neinerciální, a abychom v ní mohli používat Newtonovy zákony, musíme zavést setrvačné síly. V tomto případě bereme v úvahu sílu odstředivou a sílu Coriolisovu.

Pro velikost odstředivé síly působící na hmotný bod o hmotnosti  $m$  v rotující vztažné soustavě platí

$$F_o = ma_o = m\omega^2 R, \quad (1.8)$$



Obrázek 1.3: Tíhové zrychlení.

<sup>3</sup>Jeden hvězdný den se přibližně rovná 23h 56m.

kde  $a_o$  je velikost odstředivého zrychlení,  $\omega$  je velikost úhlové rychlosti rotace a  $R$  je vzdálenost hmotného bodu od osy rotace. Odstředivá síla míří kolmo od osy rotace.

Coriolisova síla působí pouze na tělesa, která se vzhledem k rotující vztažné soustavě pohybují a pláží pro ni

$$\mathbf{F}_C = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (1.9)$$

kde  $\mathbf{v}$  je vektor rychlosti tělesa vzhledem k rotující vztažné soustavě a  $\boldsymbol{\omega}$  je vektor<sup>4</sup> úhlové rychlosti otáčení vztažné soustavy. Coriolisova síla je silou gyroskopickou (nemění velikost rychlosti těles, pouze jejich směr), v souvislosti s rotací Země se projevuje jen slabě a v rámci tohoto textu její účinky zanedbáme<sup>5</sup>.

Celková síla působící na volně se pohybující těleso popisované ze vztažné soustavy pevně spojené s rotující Zemí je tedy dána vektorovým součtem  $\mathbf{F}_G + \mathbf{F}_o$ .

Úlohu můžeme zjednodušit, stejně jako v předchozím případě, pokud se omezíme na popis pohybu v omezeném prostoru v blízkosti povrchu Země. Výsledek se liší pouze tím, že tzv. vektor tíhového zrychlení  $\mathbf{g}$  je dán součtem vektoru gravitačního a odstředivého zrychlení  $\mathbf{g} = \mathbf{a}_g + \mathbf{a}_o$ , nemíří obecně do středu Země a jeho velikost závisí na zeměpisné šířce  $\phi$  (s rostoucí velikostí zeměpisné šířky roste, maxima jsou na pólech, minimum na rovníku).

Kdyby tedy Země byla koule o poloměru  $R_Z$ , na rovníku by platilo  $R = R_Z$ , odstředivá síla na rovníku míří radiálně od středu Země opačným směrem, nežli síla gravitační. Pro velikost tíhového zrychlení na rovníku by tedy platilo

$$g_{\text{rov}} = a_g - a_o = \frac{GM_Z}{R_Z^2} - \frac{4\pi^2}{T^2}R_Z = 9,7641 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

cože je o  $0,0339 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  méně než na pólech, kde platí  $R = 0 \text{ km}$  a tíhové zrychlení je zde rovno zrychlení gravitačnímu ( $g_{\text{pól}} = a_g$ ).

I v tomto případě můžeme zavést v různých místech lokální kartézské souřadnice, místní vertikály však nemají radiální směr (do středu Země), ale místní směr tíhového zrychlení (tan snadno určíme pomocí olovnice). V blízkosti povrchu Země v omezeném prostoru pak můžeme tíhové pole opět považovat za homogenní a pro tíhovou sílu psát

$$\mathbf{F}_g = m\mathbf{g} \quad \text{kde} \quad \mathbf{g} = [0, 0, -g], \quad (1.10)$$

## Země jako rotující rotační elipsoid

Situace je ve skutečnosti ještě o něco složitější, neboť Země je díky své rotaci na pólech mírně zploštělá (polární poloměr Země je  $R_p = 6\,356,75 \text{ km}$ ) a svým tvarem připomíná rotační elipsoid. Proto je i velikost gravitačního zrychlení na povrchu Země funkcí zeměpisné šířky. Pro výpočet velikosti tíhového zrychlení u hladiny moře je možné využít přibližný empirický vzorec<sup>6</sup>

$$g = g_r(1 + \gamma_2 \sin^2 \phi + \gamma_4 \sin^4 \phi), \quad (1.11)$$

kde  $g_e = 9,780\,327 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  je tíhové zrychlení na rovníku,  $\phi$  je zeměpisná šířka a  $\gamma_2 = 0,005\,279\,2$  a  $\gamma_4 = 0,000\,023\,2$  jsou korekční koeficienty. Z vzorce (1.11) tedy vyplývá, že tíhové zrychlení na rovníku má velikost  $g_{\text{rov}} \approx 9,78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , na pólech  $g_{\text{pól}} \approx 9,83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  a v Praze ( $\phi = 50^\circ 06'$ ) pak

<sup>4</sup>Tento vektor má směr osy rotace, jeho orientace se určuje pravidlem pravé ruky

<sup>5</sup>Dá se například ukázat, že Coriolisova síla vychýlí kuličku puštěnou volným pádem z Petřínské rozhledny (z výšky 60 m) o 6,5 mm na východ.

<sup>6</sup>Skutečná hodnota tíhového zrychlení se na různých místech na Zemi mírně liší i od tohoto vzorce, Země nemá pravidelný tvar a zemská kůra má v různých místech různou hustotu.

$g_{\text{Praha}} \approx 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . S nadmořskou výškou tíhové zrychlení klesá, stejně jak bylo ukázáno výše, rychlostí cca  $0,003 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  na každý kilometr.

Tíhové pole v omezeném prostoru v blízkosti povrchu Země můžeme považovat za homogenní, vektor tíhové síly v lokálních kartézských souřadnicích zavést pomocí vztahu (1.10) a pro hodnotu velikosti tíhového zrychlení použít vztah (1.11).

### 1.2.3 Pohyb v tíhovém poli Země

Vyšetřit pohyb tělesa (hmotného bodu) v tíhovém poli Země je snadné. Zanedbáme-li opět odpor vzduchu, můžeme pohybovou rovnici spolu se vztahem pro tíhovou sílu (1.10) psát ve tvaru

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{g} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g}. \quad (1.12)$$

Jelikož vektor  $\mathbf{g}$  nyní (v omezeném prostoru) považujeme za konstantní, můžeme rovnici (1.12) snadno zintegrovat

$$d\mathbf{v} = \mathbf{g} dt \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbf{v}_0}^{\mathbf{v}} d\mathbf{v}' = \int_0^t \mathbf{g} dt' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{g}t + \mathbf{v}_0, \quad (1.13)$$

kde  $\mathbf{v}_0$  je rychlost hmotného bodu v čase  $t = 0$  (počáteční podmínka). Ze vztahu (1.13) ještě integrací vypočteme závislost polohového vektoru na čase

$$d\mathbf{r} = (\mathbf{g}t + \mathbf{v}_0) dt \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' = \int_0^t (\mathbf{g}t' + \mathbf{v}_0) dt' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} = \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 + \mathbf{v}_0t + \mathbf{r}_0, \quad (1.14)$$

kde  $\mathbf{r}_0$  je polohový vektor hmotného bodu v čase  $t = 0$  (počáteční podmínka).

#### Příklad: svislý vrh

Z místa o polohovém vektoru  $\mathbf{r}_0 = [0, 0, h]$  (z výšky  $h$ ) vrhneme těleso vertikálním směrem počáteční rychlostí  $\mathbf{v}_0 = [0, 0, v_0]$ . Jelikož platí  $\mathbf{g} = [0, 0, -g]$ , dostaneme dosazením do jednotlivých složek vztahu (1.14) postupně

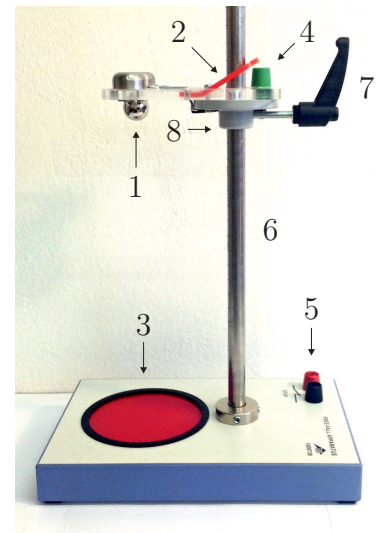
$$x(t) = 0, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h.$$

Dobu pádu  $\tau$  dostaneme dosazením  $z = 0$  a vyřešením kvadratické rovnice

$$h = \frac{1}{2}g\tau^2 - v_0\tau. \quad (1.15)$$

## 1.3 Experiment

Experiment funguje tak, že ocelová kulička se pouští z různých výšek  $h_i$  a měří se příslušná doba pádu  $\tau_i$ . K měření se zde používá jednoduché zařízení, kterému se říká pádostrój, viz obr. 1.4. Ocelová kulička [1] je držena v horní části pádostroje malým neodýmovým magnetem. Stisknutím spouště [2] se kulička uvolní a dopadne na detektor dopadu [3]. Informace o uvolnění kuličky a jejím dopadu se přenáší do časovače přes konektory [4] a [5]. Držák s kuličkou se posouvá nahoru a dolů po tyči s centimetrovým dělením [6], k uvolnění a uchycení držáku se používá šroub [7].



Obrázek 1.4: Pádostrój.



Obrázek 1.5: Časovač / čítač.

Časovač / čítač pro měření doby pádu kuličky je zobrazen na obrázku 1.5. Otočným přepínačem [1] se volí režim přístroje, doba pádu kuličky se měří v poloze  $\Delta t_{AB}$ , přístroj umožňuje měřit s rozlišením 0,1 s, 1 ms a 0,1 ms. Stisknutím tlačítka **RESET** [2] se nuluje displej, kontakt uvolnění kuličky se připojuje ke svorce **IN START/COUNT** [3], čidlo dopadu kuličky ke svorkám **IN STOP** [4] (je třeba respektovat barvy svorek). Přístroj se zapíná a vypíná vypínačem na napájecím kabelu.

## 1.4 Zpracování naměřených hodnot

Pro kuličku daného průměru se pro různé výšky  $h_i$  naměří příslušné doby pádu  $\tau_i$ . Naměřené dvojice bodů  $(\tau_i, h_i)$  se metodou nejmenších čtverců<sup>7</sup> proloží polynomem druhého stupně

$$h = a_2\tau^2 + a_1\tau + a_0. \quad (1.16)$$

Z porovnání vztahů (1.15) a (1.16) je zřejmé, že tíhové zrychlení odpovídá koeficientu u kvadratického členu a platí

$$g = 2a_2, \quad \sigma_g = 2\sigma_{a_2}.$$

Koeficient  $a_1$  odpovídá počáteční rychlosti kuličky a vzhledem ke konstrukci uvolňovacího mechanismu kuličky by jeho hodnota měla být blízká nule.

Koeficient  $a_0$  odpovídá rozdílu mezi skutečnou výškou pádu kuličky a hodnotou nastavenou na tyči s centimetrovým dělením. Jelikož výška pádu kuličky pro danou rysku na tyči závisí na průměru kuličky, je obtížné na tyči nastavovat skutečnou výšku pádu. Díky zpracování metodou nejmenších čtverců je však možno postupovat tak, že na jednotlivé rysky dělení tyče se nastavuje spodní okraj držáku kuličky ([8], viz obr. 1.4). Tím sice dochází k systematické chybě v nastavení výšky pádu, ta se však neprojeví ve výsledku (velikost naměřeného tíhového zrychlení), ale v hodnotě koeficientu  $a_0$ .

## 1.5 Postup měření

1. Vyberte si jednu ocelovou kuličku, změřte její průměr a hmotnost.
2. Na pádstroji popsaném v odstavci 1.3 pro několik (více než 10) různých výšek  $h_i$  změřte doby pádu kuličky  $\tau_i$ .

<sup>7</sup>K tomuto účelu můžete použít *Univerzální nástroj na kreslení grafů* na adrese <http://herodes.feld.cvut.cz/mereni/>.

3. Postupem popsaným v odstavci 1.4 vypočtete velikost tíhového zrychlení a jeho nejistotu, naměřenou hodnotu porovnejte s místní hodnotou pro Prahu.
4. Vypracujte graf závislosti výšky pádu na době pádu (naměřené hodnoty proložte polynomem 2. stupně, z něhož jste určili tíhové zrychlení).
5. Body 1–4 zopakujte pro kuličku jiného průměru.

## 1.6 Použitá literatura

1. Jiří Bajer: Mechanika 1, *Univerzita Palackého v Olomouci*, Olomouc, 2004.
2. Jiří Bajer: Mechanika 2, *Univerzita Palackého v Olomouci*, Olomouc, 2004.
3. Kolektiv autorů: Výkladový slovník fyziky pro základní vysokoškolský kurz, *Prometheus*, 1999.

## 1.7 Dodatek – vliv atmosféry

### 1.7.1 Vztlak

V tekutinách, tedy i v atmosféře – vzduchu – na tělesa působí vztlaková síla. Ta je podle Archimédova zákona rovna tíze tekutiny vytlačené objemem tělesa, působí proti tíhové síle a pro výslednici sil, působících na těleso jež je vzhledem k tekutině v klidu, platí

$$\mathbf{F}'_g = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{vz} = m\mathbf{g} - \rho_0 V \mathbf{g} = (\rho - \rho_0) V \mathbf{g}, \quad (1.17)$$

kde  $\rho_0$  je hustota tekutiny (atmosféry),  $\rho$  je průměrná hustota tělesa a  $V$  je jeho objem.

### 1.7.2 Odpor prostředí

Pokud se těleso pohybuje v tekutině, působí na něj odporová síla, která je projevem vazkosti tekutiny. Obecně je tato síla složitou funkcí rychlosti, tvaru a velikosti tělesa a viskozity tekutiny. K výpočtu velikosti odporové síly můžeme použít přibližný empirický Newtonův vzorec

$$F_r \approx \frac{1}{2} C \rho_0 S v^2, \quad (1.18)$$

kde  $C$  je koeficient postihující tvar tělesa (pro kouli pohybující se „větší rychlostí“ platí<sup>8</sup>  $C \approx 0,5$ ),  $\rho_0$  je hustota tekutiny,  $S$  je čelní průřez tělesa a  $v$  je velikost rychlosti tělesa vzhledem k tekutině.

Vyšetřeme nyní, podobně jako v odstavci 1.2.3, volný pád z výšky  $h$  s uvažováním odporu prostředí popsaným pomocí vzorce (1.18). Pro jednoduchost budeme uvažovat nulovou počáteční rychlost. Pro  $z$ -ovou složku vektoru rychlosti platí

$$m \frac{dv_z}{dt} = -mg + \frac{1}{2} C \rho_0 S v_z^2. \quad (1.19)$$

---

<sup>8</sup>Velikost koeficientu  $C$  pro daný tvar tělesa závisí na tzv. Reynoldsově čísle.

Člen popisující odporovou sílu má kladné znaménko, neboť těleso pohybující se volným pádem se pohybuje záporným směrem osy  $z$  a odporová síla má směr opačný oproti vektoru rychlosti, tedy kladný. Postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{dv_z}{dt} = -g + \frac{C\rho_0 S}{2m}v_z^2 &\Rightarrow \frac{dv_z}{-g + \frac{C\rho_0 S}{2m}v_z^2} = dt \Rightarrow \int_0^{v_z} \frac{dv'_z}{-g + \frac{C\rho_0 S}{2m}v'^2_z} = \int_0^t dt' \Rightarrow \\ -\sqrt{\frac{2m}{C\rho_0 g S}} \operatorname{arctanh} \left( \sqrt{\frac{C\rho_0 S}{2mg}} v_z \right) = t &\Rightarrow v_z = -\sqrt{\frac{2mg}{C\rho_0 S}} \tanh \left( \sqrt{\frac{C\rho_0 g S}{2m}} t \right). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Z výsledku (1.20) vzhledem k vlastnostem funkce hyperbolický tangens vyplývá, že velikost rychlosti  $v_z$  narůstá od nuly až k limitní hodnotě

$$|v_z|_{\max} = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho_0 S}}.$$

Využijeme-li vztah pro Taylorův rozvoj funkce hyperbolický tangens

$$\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \dots,$$

dostaneme

$$v_z = -gt + \frac{C\rho_0 S g^2}{6m} t^3 - \dots \quad (1.21)$$

odkud je vidět, že těleso se zpočátku, dokud je velikost odporové síly malá, pohybuje s konstantním zrychlením o velikosti  $g$ .

Integrací vztahů (1.21) a (1.20) dostaneme

$$z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{C\rho_0 S g^2}{24m} t^4 - \dots = h - \frac{2m}{C\rho_0 S} \ln \left[ \cosh \left( \sqrt{\frac{C\rho_0 g S}{2m}} t \right) \right]. \quad (1.22)$$