

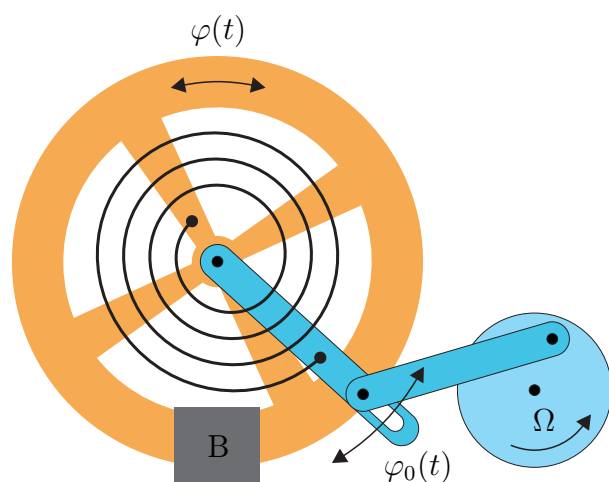
Laboratorní úloha

Studium mechanických kmitů - Pohlovo kyvadlo

1.1 Úkol měření

1. Proměřte kmitočtové charakteristiky nucených kmitů Pohlova kyvadla pro různá tlumení.
2. Změřte koeficient útlumu a periodu volných kmitů Pohlova kyvadla pro různá tlumení.

1.2 Pohlovo kyvadlo



Obrázek 1.1: Pohlovo kyvadlo.

Princip Pohlova torzního kyvadla je schématicky naznačen na obrázku 1.1. Měděný kotouč je přes spirální pružinu propojen s pákovým mechanismem, který pružinu periodicky zkrucuje díky uchycení k otáčející se hřídeli elektromotoru. Otáčivý pohyb hřídele tak budí kmity kyvadla.

Při popisu pohybu kotouče Pohlova kyvadla vyjdeme z pohybové rovnice pro rotační pohyb kolem pevné osy

$$J\ddot{\varphi} = M, \quad (1.1)$$

kde J je moment setrvačnosti kotouče vzhledem k ose otáčení, $\ddot{\varphi}$ představuje druhou derivaci úhlu vychýlení kotouče (úhlové zrychlení) a M reprezentuje moment síly ve směru rotační osy kotouče.

Moment síly zde má dvě složky. Jednou z nich je vratný moment, kterým na kotouč působí pružina a

platí pro něj

$$M_p = k\Delta\varphi = k(\varphi_0 - \varphi), \quad (1.2)$$

kde k je konstanta vyjadřující tuhost pružiny a $\Delta\varphi$ je úhel zkroucení pružiny, vyjádřený jako rozdíl úhlových výchylek budící páky a kotouče od rovnovážných hodnot. Druhá složka je brzdny moment způsobený aerodynamickým odporem a třením ložisek uložení kotouče. Kyvadlo je dále vybaveno elektromagnetickou brzdou (B) pro zajištění možnosti studia vlivu tlumení. Budeme předpokládat, že brzdny moment je úměrný okamžité úhlové rychlosti kotouče

$$M_b = -b\dot{\varphi}, \quad (1.3)$$

kde b je konstanta a znaménko minus vyjadřuje skutečnost, že brzdny moment má vždy opačný směr oproti vektoru úhlové rychlosti. Po dosazení vztahů (1.2) a (1.3) do (1.1) dostaneme pohybovou rovnici ve tvaru

$$J\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + k\varphi = k\varphi_0(t). \quad (1.4)$$

Vydělením rovnice (1.4) momentem setrvačnosti dostaneme

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = e_0(t), \quad (1.5)$$

kde jsme označili¹ $\delta = b/2J$, $\omega_0 = \sqrt{k/J}$ a $e_0(t) = \varphi_0(t)/J$. V tomto konkrétním případě platí

$$e_0(t) = E_0 \cos \Omega t,$$

kde E_0 je konstanta (součin tuhosti pružiny a amplitudy úhlové výchylky budící páky) a Ω je úhlový kmitočet rotace hřídele elektromotoru. Rovnice (1.5) představuje z hlediska matematické terminologie nehomogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Systém, jehož chování se řídí touto diferenciální rovnicí, se nazývá lineární harmonický oscilátor. Chování mnoha (nejen fyzikálních) systémů lze popsat (někdy alespoň v prvním přiblížení) právě pomocí rovnice (1.5). Z tohoto důvodu se v následujícím textu blížeji podíváme na její řešení.

1.3 Lineární harmonický oscilátor

Jelikož proměnná v rovnici (1.5) může obecně představovat v zásadě libovolnou veličinu, v dalším textu ji budeme značit $x(t)$ a nazývat výchylkou a její derivaci $\dot{x}(t)$ rychlostí. Dostaneme tak

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2x = a_0(t). \quad (1.6)$$

V závislosti na hodnotách jednotlivých parametrů v rovnici (1.6) rozlišujeme níže uvedené typy chování příslušného systému.

1.3.1 Volné netlumené kmity

Nejdříve budeme předpokládat, že popisovaný systém je netlumený ($\delta = 0$) a není buzený ($a_0 = 0$). Rovnice (1.6) má potom tvar

$$\ddot{x} + \omega_0^2x = 0. \quad (1.7)$$

Jelikož víme, že exponenciála se derivováním nemění, pokusíme se nalézt řešení rovnice (1.7) ve tvaru $x(t) = \exp(\lambda t)$, kde λ je konstanta. Po dosazení předpokládaného řešení do (1.7) dostaneme

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda^2 + \omega_0^2) \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm j\omega_0.$$

Zjistili jsme, že rovnice (1.7) má dva kořeny a jim odpovídají dvě partikulární řešení

$$x_1(t) = e^{j\omega_0 t}, \quad x_2(t) = e^{-j\omega_0 t},$$

která jsou lineárně nezávislá². Obecné řešení rovnice (1.7) dostaneme jako lineární kombinaci řešení $x_1(t)$ a $x_2(t)$, tedy

$$x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) = Ae^{j\omega_0 t} + Be^{-j\omega_0 t}, \quad (1.8)$$

¹Z dalšího textu vyplyne proč právě takto.

²Nenalezeme žádnou konstantu c takovou, pro kterou by obecně platilo $x_1(t) + cx_2(t) = 0$

kde A a B jsou integrační konstanty, jejichž hodnota, jak je ukázáno níže, závisí na počátečních podmínkách. Fakt, že $x(t)$ je také řešením rovnice (1.7) je dán její linearitou, můžeme se o něm snadno přesvědčit přímým výpočtem a vyjadřuje princip superpozice.

Mohlo by se zdát, že řešení (1.8) nemůže popisovat chování reálného fyzikálního systému, neboť obsahuje komplexní funkce. Pomocí Eulerových vzorců

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha, \quad e^{-j\alpha} = \cos \alpha - j \sin \alpha$$

dostaneme

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{j\omega_0 t} + Be^{-j\omega_0 t} = A(\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t) + B(\cos \omega_0 t - j \sin \omega_0 t) = \\ &= \underbrace{(A + B)}_C \cos \omega_0 t + \underbrace{(jA - jB)}_D \sin \omega_0 t = C \cos \omega_0 t + D \sin \omega_0 t, \end{aligned} \quad (1.9)$$

odkud je vidět, že pro reálné konstanty C a D je i řešení $x(t)$ reálné. Tento výsledek můžeme dále upravit následujícím způsobem.

$$x(t) = C \cos \omega_0 t + D \sin \omega_0 t = \sqrt{C^2 + D^2} \left(\frac{C}{\sqrt{C^2 + D^2}} \cos \omega_0 t + \frac{D}{\sqrt{C^2 + D^2}} \sin \omega_0 t \right). \quad (1.10)$$

Označíme-li $C/\sqrt{C^2 + D^2} = \cos \varphi$, můžeme dále psát

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - \frac{C^2}{C^2 + D^2}} = \frac{D}{\sqrt{C^2 + D^2}},$$

takže vztah (1.10) přejde do tvaru

$$x(t) = E (\cos \varphi \cos \omega_0 t + \sin \varphi \sin \omega_0 t) = E \cos(\omega_0 t - \varphi), \quad (1.11)$$

kde $E = \sqrt{C^2 + D^2}$ a $\tan \varphi = D/C$. Rovnice (1.11) popisuje netlumené harmonické kmity, jejichž amplituda E se s časem nemění. Protože základní perioda funkce kosinus je 2π , dostaneme pro periodu kmitů T

$$\omega_0(t + T) - \varphi = \omega_0 t - \varphi + 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f},$$

kde $f = 1/T$ je kmitočet (počet kmitů za jednu sekundu) a $\omega_0 = 2\pi f$ je úhlový kmitočet.

Dosud jsme se nezajímali o to, čemu se rovnají integrační konstanty (A, B) , (C, D) , (E, φ) . Jejich hodnoty můžeme určit z počátečních podmínek. Víme-li, že v nějakém čase t_0 je výchylka $x(t_0) = x_0$ a její derivace (okamžitá rychlost) $\dot{x}(t_0) = v_0$, můžeme tyto hodnoty dosadit do příslušných rovnic ((1.8), (1.9), nebo (1.11)) a vypočítat hledané koeficienty.

Uvedme pár příkladů. Budeme-li uvažovat řešení (1.9), dostaneme derivováním pro rychlost

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega_0 C \sin \omega_0 t + \omega_0 D \cos \omega_0 t. \quad (1.12)$$

Nechť v čase $t_0 = 0$ platí: $x(0) = x_0$, $v(0) = 0$. Dosazením do vztahů (1.9) a (1.12) dostaneme

$$x(0) = x_0 = C, \quad v(0) = 0 = \omega_0 D \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 \cos \omega_0 t.$$

Nechť v čase $t_0 = 0$ platí: $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$. Dosazením do vztahů (1.9) a (1.12) dostaneme

$$x(0) = 0 = C, \quad v(0) = v_0 = \omega_0 D \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Nechť v čase $t_0 = 0$ platí: $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$. Dosazením do vztahů (1.9) a (1.12) dostaneme

$$x(0) = x_0 = C, \quad v(0) = v_0 = \omega_0 D \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \cos \left[\omega_0 t - \arctan \left(\frac{v_0}{\omega_0 x_0} \right) \right].$$

1.3.2 Volné tlumené kmity

V tomto případě je mechanický systém tlumený ($\delta > 0$) a není buzený ($a_0 = 0$). Rovnice (1.6) má potom tvar

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.13)$$

Její řešení budeme opět hledat ve tvaru $x(t) = \exp(\lambda t)$, kde λ je konstanta. Dosazením do rovnice (1.13) dostaneme

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\delta\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2) \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0,$$

odkud řešením kvadratické rovnice dostaneme dva kořeny $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ a jim odpovídající dvě partikulární lineárně nezávislá řešení

$$x_1(t) = e^{-\delta t + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t}, \quad x_2(t) = e^{-\delta t - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t}. \quad (1.14)$$

Řešení obecné má opět tvar lineární kombinace partikulárních řešení

$$x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) = e^{-\delta t} \left(Ae^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} + Be^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} \right). \quad (1.15)$$

V závislosti na vzájemném poměru koeficientů δ a ω_0 rozlišujeme následující tři situace.

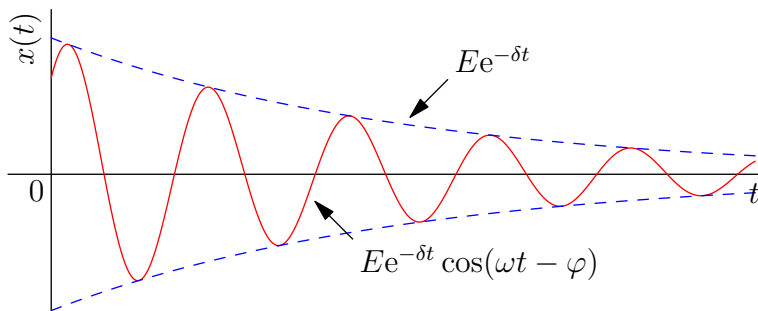
Slabé tlumení ($\delta < \omega_0$)

V tomto případě je argument odmocniny ve vztahu (1.15) záporný. Můžeme psát

$$\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-(\omega_0^2 - \delta^2)} = j\sqrt{(\omega_0^2 - \delta^2)} = j\omega,$$

kde $\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \delta^2)} = 2\pi f = 2\pi/T$ je reálné číslo. Vztah (1.15) můžeme tedy přepsat jako

$$x(t) = e^{-\delta t} (Ae^{j\omega t} + Be^{-j\omega t}) = e^{-\delta t} (C \cos \omega t + D \sin \omega t) = Ee^{-\delta t} \cos(\omega t - \varphi), \quad (1.16)$$



Obrázek 1.2: Slabě tlumené kmity.

Vztahy mezi integračními konstantami (A, B), (C, D), (E, φ) jsou stejné jako v předchozím případě a jejich hodnota se určí z počátečních podmínek.

Jak je ze vztahů (1.16) vidět, amplituda kmitů není konstantní, ale klesá exponenciálně s rostoucím časem, viz příklad uvedený na obrázku 1.2. Díky tomu není tento kmitavý proces periodický, nicméně některé děje se v něm opakují periodicky. Například pro nulovou výchylku platí

$$x(t_n) = 0 = \underbrace{Ee^{-\delta t_n}}_{\neq 0} \cos(\omega t_n - \varphi) \Rightarrow \omega t_n - \varphi = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow t_n = n\frac{T}{2} + \frac{1}{\omega} \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right),$$

kde n je celé číslo. Průchod nulovou hodnotou se tedy opakuje s periodou $T/2$. Obdobně dostaneme pro maxima a minima výchylky

$$\dot{x}(t_m) = 0 = -\underbrace{Ee^{-\delta t_m}}_{\neq 0} [\delta \cos(\omega t_m - \varphi) + \omega \sin(\omega t_m - \varphi)] \Rightarrow \tan(\omega t_m - \varphi) = -\frac{\delta}{\omega}$$

a dále³

$$\omega t_m - \varphi = m\pi - \arctan\left(\frac{\delta}{\omega}\right) \Rightarrow t_m = m\frac{T}{2} + \frac{1}{\omega} \left[\varphi - \arctan\left(\frac{\delta}{\omega}\right) \right],$$

kde m je celé číslo. Odtud vyplývá, že jednotlivé extrémny se opakují s periodou $T/2$, přičemž mezi dvěma maximy je vždy jedno minimum a naopak (viz obrázek 1.2), takže jednotlivá minima a maxima se opakují s periodou T .

Pokud bychom vypočetli poměr amplitud dvou po sobě jdoucích maxim (anebo minim), dostali bychom díky periodicitě funkce kosínus

$$\frac{x(t_m)}{x(t_{m+2})} = \frac{\exp\{-\delta [m\frac{T}{2} + \frac{\varphi}{\omega} - \frac{1}{\omega} \arctan(\frac{\delta}{\omega})]\}}{\exp\{-(m+2)\frac{T}{2} + \frac{\varphi}{\omega} - \frac{1}{\omega} \arctan(\frac{\delta}{\omega})\}} = e^{\delta T}.$$

Přirozený logaritmus této veličiny se nazývá logaritmický dekrement útlumu a používá se k experimentálnímu určení koeficientu útlumu. Platí pro něj vztah

$$\Lambda = \ln \left[\frac{x(t_m)}{x(t_{m+2})} \right] = \delta T = \delta \frac{2\pi}{\omega}. \quad (1.17)$$

Čím vyšší bude mít koeficient δ hodnotu, tím nižší budou mít kmity frekvenci a tím rychleji budou zatlumeny. Takto se bude kmitající systém chovat, pokud $\delta < \omega_0$. V případě, že $\delta = \omega_0$, hovoříme o tzv. kritickém tlumení.

Kritické tlumení ($\delta = \omega_0$)

Je zřejmé, že v tomto případě nelze použít k popisu kmitavého pohybu vztah (1.15), neboť argument obou exponenciál v závorce je nulový, integrační konstanty se sečtou a stává se z nich jedna. Za této situace by nebylo možné pomocí jediné integrační konstanty vyhovět obecně dvěma počátečním podmínkám ($x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$). Tato situace vyplývá ze skutečnosti, že partikulární řešení (1.14) nejsou v tomto případě lineárně nezávislá (kořen charakteristické rovnice $\lambda_{1,2}$ je dvojnásobný).

Druhé (lineárně nezávislé) partikulární řešení najdeme následujícím způsobem. Budeme předpokládat, že tlumení je o malinko větší než kritické a platí $\delta^2 = \omega_0^2 + \varepsilon^2$, $\varepsilon \ll \omega_0$. Partikulární řešení (1.14) mají v tomto případě tvar

$$x_1(t) = e^{-\delta t} e^{\varepsilon t}, \quad x_2(t) = e^{-\delta t} e^{-\varepsilon t}.$$

Vzhledem k tomu, že ε je malé, můžeme provést Taylorův rozvoj partikulárních řešení

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-\delta t} e^{\varepsilon t} = e^{-\delta t} \left(1 + \varepsilon t + \frac{1}{2} \varepsilon^2 t^2 + \frac{1}{6} \varepsilon^3 t^3 + \dots \right), \\ x_2(t) &= e^{-\delta t} e^{-\varepsilon t} = e^{-\delta t} \left(1 - \varepsilon t + \frac{1}{2} \varepsilon^2 t^2 - \frac{1}{6} \varepsilon^3 t^3 + \dots \right) \end{aligned}$$

a vypočítat limitu

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x_1(t) - x_2(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-\delta t}}{\varepsilon} \left(2\varepsilon t + \frac{1}{3} \varepsilon^3 t^3 + \dots \right) = 2te^{-\delta t}.$$

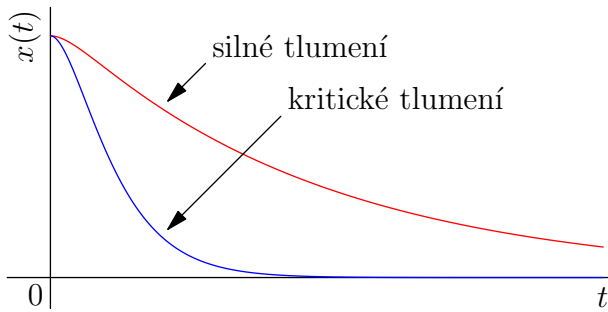
Jelikož je diferenciální rovnice (1.13) lineární a předchozí výsledek jsme dostali lineární kombinací jejích řešení, je i tento výsledek řešením rovnice (1.13). Snadno se můžeme přímým dosazením do rovnice (1.13) přesvědčit⁴, že její obecné řešení má tvar

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\delta t}.$$

³Laskavý čtenář jistě ví, že perioda funkce tangens je π .

⁴Ale samozřejmě jenom pro případ, kdy $\omega_0 = \delta$.

Silné tlumení ($\delta > \omega_0$)



Obrázek 1.3: Silně a kriticky tlumený systém.

harmonický průběh s amplitudou A_0 a úhlovým kmitočtem Ω . Pohybová rovnice (1.6) má potom tvar

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \cos \Omega t. \quad (1.18)$$

Diferenciální rovnice (1.18) popisuje nucené tlumené kmitý.

Z matematického hlediska se jedná o rovnici nehomogenní (obsahuje člen nezávislý na $x(t)$). Obecné řešení nehomogenní rovnice budeme hledat jako součet obecného řešení rovnice homogenní (bez pravé strany) a partikulárního řešení $x_0(t)$ rovnice nehomogenní

$$x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) + x_0(t),$$

kde A a B jsou integrační konstanty, jejichž hodnota závisí na počátečních podmínkách (výchylka, rychlost). Díky linearitě rovnice lineárního harmonického oscilátoru bude tedy platit

$$\ddot{x}_{1,2} + 2\delta\dot{x}_{1,2} + \omega_0^2 x_{1,2} = 0, \quad (1.19a)$$

$$\ddot{x}_0 + 2\delta\dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = A_0 \cos \Omega t, \quad (1.19b)$$

Řešení rovnice (1.19a) odpovídá volným tlumeným kmitům a bylo předmětem předchozích odstavců. Ve všech případech amplituda těchto volných kmitů klesá exponenciálně s časem a kmitý po uplynutí jisté doby vymizí - představují tzv. přechodový jev.

Po odeznění přechodového jevu zůstanou přítomny pouze kmitý nucené, reprezentované partikulárním řešením rovnice (1.19b). Toto řešení nejrychleji nalezneme následujícím způsobem. Pro pravou stranu rovnice (1.19b) můžeme psát

$$A_0 \cos \Omega t = \Re (A_0 \cos \Omega t + jA_0 \sin \Omega t) = \Re (A_0 e^{j\Omega t}).$$

Budeme dále hledat partikulární řešení rovnice

$$\ddot{z}_0 + 2\delta\dot{z}_0 + \omega_0^2 z_0 = A_0 e^{j\Omega t}$$

a jeho reálná část pak bude odpovídat výchylce $x_0(t)$. Tento postup funguje opět díky linearitě pohybové rovnice a z ní vyplývajícího principu superpozice. S ohledem na tvar pravé strany vyzkoušíme dosadit⁵ $z_0 = K \exp(j\Omega t)$. Dostaneme

$$(-\Omega^2 + 2j\delta\Omega + \omega_0^2) K e^{j\Omega t} = A_0 e^{j\Omega t} \Rightarrow K = \frac{A_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\delta\Omega} \Rightarrow z_0 = \frac{A_0 e^{j\Omega t}}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\delta\Omega}.$$

⁵Předpokládáme zde s ohledem na praktickou zkušenost, že nucené kmitý (po odeznění přechodového jevu, viz výše) budou mít stejný kmitočet jako buzení.

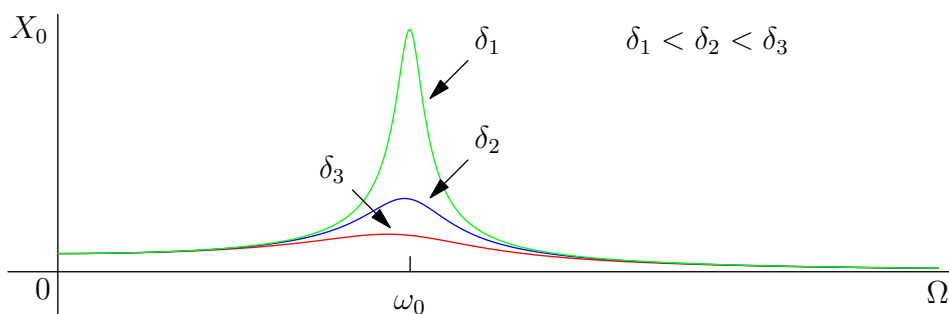
Výsledek rozepíšeme na reálnou a imaginární část

$$z_0 = A_0 \frac{(\cos \Omega t + j \sin \Omega t)}{(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\delta\Omega)} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2j\delta\Omega)}{(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2j\delta\Omega)} =$$

$$= A_0 \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \Omega t + 2\delta\Omega \sin \Omega t}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2} + jA_0 \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \Omega t - 2\delta\Omega \cos \Omega t}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2},$$

přičemž reálná část výsledku je hledané partikulární řešení popisující kmity po odeznění přechodového jevu. S využitím vzorců (1.10) a (1.11) můžeme rovněž psát⁶

$$x_0(t) = X_0 \cos(\Omega t - \vartheta), \quad X_0 = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}, \quad \tan \vartheta = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}, \quad (1.20)$$



Obrázek 1.4: Amplituda nucených kmitů v závislosti na budící frekvenci Ω .

kde X_0 reprezentuje amplitudu kmitů. Ze vzorce pro amplitudu je zřejmé, že pokud $\Omega \approx \omega_0$, může amplituda dosahovat při malém útlumu δ značných hodnot, dochází k tzv. rezonanci. Přesnou hodnotu rezonančního kmitočtu výchylky dostaneme z podmínky pro extrémny funkce $X_0(\Omega)$ a věty o derivaci složené funkce:

$$\frac{dX_0}{d\Omega} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\Omega} \left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2 \right] \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 4\Omega (\Omega^2 + 2\delta^2 - \omega_0^2) = 0.$$

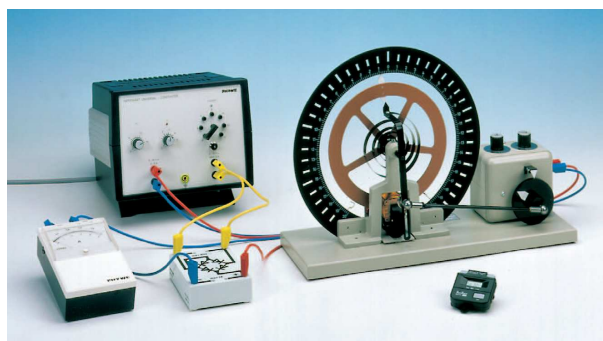
Odtud plyne

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (1.21)$$

1.4 Zapojení úlohy

Pro studium volných kmitů postačí připojit svorky elektromagnetické brzdy (pod kotoučem kyvadla) přes usměrňovač ke střídavému výstupu (černé svorky AC) laboratorního zdroje. Mezi laboratorní zdroj a usměrňovač zapojte ampérmetr pro měření proudu I_B .

Pro studium nucených kmitů je třeba propojit svorky stejnosměrného výstupu DC laboratorního zdroje s napájecími svorkami elektromotoru (jsou označeny nápisem 24 V, 650 mA). Dbejte na správnou polaritu (odpovídající si svorky mají stejnou barvu). Na laboratorním zdroji nastavte maximální napětí. Ke svorkám na elektromotoru označeným U_x připojte voltmetr. Napětí U_x je úměrné otáčkám elektromotoru a tedy i budící frekvenci kyvadla.



⁶Samotná X_0 bychom pohodlněji dostali jako $X_0 = |K|$.

Elektromotor se zapíná společně s hrubou regulací otáček horním potenciometrem, dolním potenciometrem se otáčky jemně doladují.

1.5 Postup měření

1.5.1 Nucené kmity

1. Odpojte napájení elektromagnetické brzdy. Jelikož budete měřit závislost amplitudy kmitů na budicí frekvenci (=otáčkách elektromotoru), proměřte si nejdříve závislost otáček na napětí U_x . Závislost je lineární, pomocí metody nejmenších čtverců (Herodes) si určíte přepočtení vztah mezi napětím U_x a otáčkami. Pro zajištění větší přesnosti měřte dobu trvání alespoň deseti otoček.
2. Proměřte závislost amplitudy kmitů na budicí frekvenci pro odpojenou elektromagnetickou brzdou. Protože rovnovážná poloha kyvadla neodpovídá nule na stupnici, eliminujte toto posunutí výpočtem aritmetického průměru krajních výchylek kyvadla. V okolí rezonance měřte s jemnějším krokem, frekvence, kdy ukazatel na kotouči bude narážet do krajních zarážek, ignorujte. Nezapomeňte, že musíte počkat na odeznění přechodového jevu.
3. Opakujte měření (bod 2) se zapnutou elektromagnetickou brzdou a proudy $I_B \approx 0,25\text{A}(U_{\sim} = 4\text{V})$, $I_B \approx 0,40\text{A}(U_{\sim} = 6\text{V})$, $I_B \approx 0,55\text{A}(U_{\sim} = 8\text{V})$, $I_B \approx 0,9\text{A}(U_{\sim} = 12\text{V})$.
4. Do jednoho grafu vynesete naměřené amplitudové charakteristiky.

1.5.2 Volné kmity

1. Vypněte elektromotor, pootočením hřídele nastavte nulovou polohou indikátoru výchylky na kotouči kyvadla. Odpojte napájení elektromagnetické brzdy.
2. Vychylte kyvadlo do blízkosti krajní polohy a stopkami změřte dobu trvání alespoň deseti kmitů a vypočtete periodu kmitů kyvadla. Měření několikrát zopakujte a vypočtete průměrnou hodnotu periody kmitů.
3. Vychylte kotouč do blízkosti krajní polohy, uvolněte jej a odečtěte hodnoty několika po sobě následujících maximálních výchylek (vždy jen na jedné straně). Vzhledem k rychlosti kmitání kotouče toto odečítání zřejmě nebude příliš přesné a bude vyžadovat spolupráci dvou experimentátorů.
4. Pomocí vzorce (1.17) vypočítejte průměrnou hodnotu logaritmického dekrementu útlumu Λ a koeficientu útlumu δ .
5. Pokračujte v měření bodem 2, ale s proudem procházejícím elektromagnetickou brzdou $I_B \approx 0,25\text{A}(U_{\sim} = 4\text{V})$, $I_B \approx 0,40\text{A}(U_{\sim} = 6\text{V})$, $I_B \approx 0,55\text{A}(U_{\sim} = 8\text{V})$, $I_B \approx 0,9\text{A}(U_{\sim} = 12\text{V})$.
6. Zpracujte přehlednou tabulku, ve které pro jednotlivé hodnoty I_B uvedete naměřené hodnoty (T, f, Λ, δ). Do jednoho grafu vynesete pro jednotlivé proudy I_B závislosti maximální výchylky kyvadla na čase (k tomuto účelu můžete použít skripty na serveru Herodes - metoda nejmenších čtverců).

1.6 Použitá literatura

1. Walter Greiner: Classical Mechanics: Point Particles and Relativity (Classical Theoretical Physics), *Springer-Verlag*, New York, 2004.
2. Jiří Bajer: Mechanika 3, *Univerzita Palackého v Olomouci*, Olomouc, 2006.

29. ledna 2013, Milan Červenka, *milan.cervenka@fel.cvut.cz*