Laboratorní úloha

Stanovení tíhového zrychlení reverzním kyvadlem

1.1 Úkol měření

1. Určete velikost tíhového zrychlení pro Prahu reverzním kyvadlem.
2. Proveďte korekci výsledné hodnoty doby kyvu pro reverzní kyvadlo τ_0 pomocí vztahu (1.18) a porovnejte korigovanou hodnotu s hodnotou naměřenou.
3. Vypracujte graf závislosti τ_{0d} a τ_{0h} na poloze čočky, viz Postup měření.

1.2 Obecná část

1.2.1 Tíhové zrychlení

Spojujeme-li naši kartézskou soustavu souřadnic se zemským povrchem, považujeme ji v prvním přiblížení za inerciální[1]. Víme však, že Země rotuje a obíhá kolem Slunce. Je-li vztažná soustava spojená se Sluncem a stálicemi inerciální, potom soustava spojená se Zemí inerciální nebude. To ovšem nevadí, pokud jsme si toho vědomi a jsme připraveni na možné efekty, které neinerciálnost vztažné soustavy může způsobit. Obecně lze říci, že můžeme používat i neinerciální vztažnou soustavu, ale musíme do ní zavést další síly, tzv. zdánlivé, aby výsledek našich výpočtů souhlasil s pozorovanými jevy.

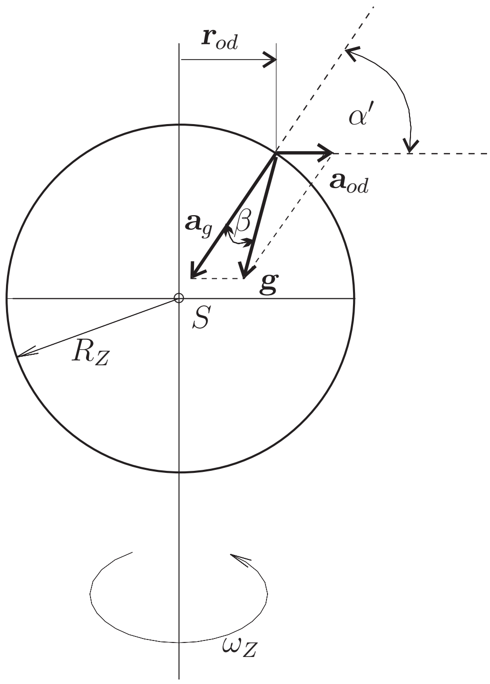
Jestliže počátek soustavy souřadnic umístíme do středu Země a osy pevně spojíme s rotující Zemí, pak pohybová rovnice částice (tělesa) o hmotnosti m má na povrchu Země následující tvar

$$m\boldsymbol{a}' = m\boldsymbol{a}_g - m\boldsymbol{A} - m\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} - m\boldsymbol{\omega}_Z \times (\boldsymbol{\omega}_Z \times \boldsymbol{r}) - 2m\boldsymbol{\omega}_Z \times \mathbf{v}' \,. \tag{1.1}$$

První člen na pravé straně (1.1) představuje jedinou pravou sílu působící na částici, gravitační působení Země. Symbol $\boldsymbol{a}_g$ reprezentuje vektor gravitačního zrychlení, do kterého bychom mohli zahrnout navíc i gravitační působení Slunce, Měsíce, planet a také tvar Země a lokální rozložení její hmoty. Jestliže předpokládáme, že se zajímáme o pohyb částice v malé oblasti prostoru na zemském povrchu a neuvažujeme-li gravitační působení jiných těles, pak je možné přímo z *Newtonova gravitačního zákona* psát, že

$$\boldsymbol{a}_g = \kappa \frac{M_Z}{r^2} \frac{\boldsymbol{r}}{r} \,, \tag{1.2}$$

[1]Pozorujeme-li pohyb částice v dané vztažné soustavě a zjistíme, že v ní platí zákon setrvačnosti, prohlásíme tuto soustavu za *inerciální*.



Obrázek 1.1: Působení tíhové síly na hmotný bod v zemském tíhovém poli.

kde r je vzdálenost studovaného hmotného bodu, resp. tělesa, od středu Země, $\boldsymbol{r}$ je odpovídající polohový vektor, M_Z je hmotnost Země a κ je gravitační konstanta. Velikost gravitačního zrychlení je pak rovna

$$a_g = \kappa \frac{M_Z}{(R_Z + h)^2} \ , \tag{1.3}$$

kde R_Z je poloměr Země a h je výška nad povrchem. V případě, že vyšetřujeme pohyb částice jen v rámci malého prostoru, je možné považovat gravitační silové pole za homogenní.

Druhý člen vyjadřuje setrvačnou sílu způsobenou nerovnoměrností translačního pohybu Země na její dráze. Tato setrvačná síla se projevuje v krátkých časových intervalech jen minimálně, a proto ji můžeme zanedbat.

Třetí člen vyjadřuje sílu *Eulerovu*, která by se projevila při zpomalování nebo zrychlování zemské rotace ($\boldsymbol{\epsilon}$ je vektor úhlového zrychlení Země). Tyto změny jsou zcela zanedbatelné a i Eulerovu sílu můžeme v tomto případě zanedbat.

Čtvrtý člen představuje sílu odstředivou. Míří kolmo od zemské osy, leží v rovině místního poledníku, viz obr. 1.1 a je dána vztahem

$$\boldsymbol{F}_{od} = -m\boldsymbol{\omega}_Z \times (\boldsymbol{\omega}_Z \times \mathbf{r}) = m\mathbf{a}_{od} = m\boldsymbol{r}_{od}\omega_Z^2 \ , \tag{1.4}$$

kde $\mathbf{a}_{od}$ je odstředivé zrychlení, ω_Z je úhlová rychlost rotace Země[2] a $\boldsymbol{r}_{od}$ představuje vektor, jenž je souhlasně orientovaný s vektorem odstředivého zrychlení a jeho velikost odpovídá vzdálenosti tělesa od osy rotace. Pro velikost odstředivého zrychlení na povrchu Země platí vztah

$$a_{od} = R_Z \omega_Z^2 \cos\alpha' \ , \tag{1.5}$$

kde α' odpovídá *zeměstředné* (*geocentrické*) *šířce* studované částice.
Toto zrychlení se vektorově sčítá se zrychlením gravitačním na zrychlení tíhové (viz obr. 1.1) a

[2] Úhlová rychlost Země $\omega_Z \doteq 2\pi/86164$ rad s^{-1}.

v místě o dané geocentrické šířce můžeme považovat výsledné tíhové pole opět za homogenní, tedy tíhové zrychlení za konstantní. Experimentálně nemáme možnost rozlišit gravitační a odstředivé zrychlení a měřit můžeme jen zrychlení tíhové. Olovnice nám tak ukazuje nikoli směr do středu Země, ale směr mírně odchýlený. Vektor tíhového zrychlení je možné vyjádřit následujícím způsobem

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{a}_g + \boldsymbol{a}_{od} = \kappa \frac{M_Z}{r^2} \frac{\boldsymbol{r}}{r} + \omega_Z^2 \boldsymbol{r}_{od} \,. \tag{1.6}$$

Označíme-li β úhel, který spolu svírají $\boldsymbol{a}_g$ a $\boldsymbol{g}$, pak pro velikost vektoru tíhového zrychlení g můžeme psát, že

$$g = a_g \cos\beta - a_{od} \cos(\alpha' + \beta) \,. \tag{1.7}$$

Za předpokladu, že Země má tvar koule, je úhel β největší na 45. rovnoběžce ($\beta = 5'56''$). Pro takovouto malou hodnotu úhlu je možné psát: $\cos\beta \simeq 1$. S tímto zjednodušením dostáváme

$$g \simeq a_g - a_{od} \cos(\alpha' + \beta) = a_g - \omega^2 R_Z \cos(\alpha' + \beta) \cos\alpha \simeq a_g - \omega^2 R_Z \cos^2\alpha \,, \tag{1.8}$$

kde $\alpha = \alpha' + \beta$ se nazývá *zeměpisná* (*geografická*) *šířka*. Uvážíme-li, že na pólech, kde $\alpha = 90°$, nepůsobí odstředivá síla, je tíhové zrychlení největší, $g_{max} = g_{90} = 9{,}83217\text{m s}^{-2}$. Vztah pro výpočet tíhového zrychlení pro danou zeměpisnou šířku α píšeme takto

$$g_\alpha = g_{90} - \omega^2 R_Z \cos^2\alpha = (9{,}83217 - 0{,}034 \cos^2\alpha) \quad \text{m s}^{-2} \,. \tag{1.9}$$

Zkušenost ukazuje, že tíhové zrychlení ubývá směrem k rovníku rychleji, než udává vztah (1.9). Experimentálně bylo zjištěno, že tíhové zrychlení závisí na zeměpisné šířce α a nadmořské výšce H. Proto byl stanoven v roce 1930 Mezinárodní geodeticko-fyzikální unií vztah, který udává hodnotu tzv. *normálního* tíhového zrychlení[3] g_n, od něhož se může reálné (v daném místě změřené) tíhové zrychlení lišit vyjímečně až o $0,003$ m s^{-2}, což je způsobeno různou hustotou zemské kůry. Zmiňovaný vztah má následující tvar

$$g_{n\alpha} = 9{,}78049(1 + 0{,}0052884 \sin^2\alpha - 0{,}0000059 \sin^2 2\alpha) - \\ - 0{,}000001967H \quad [\text{m s}^{-2}] \,. \tag{1.10}$$

Odchylka vztahu (1.9) od vztahu (1.10) je způsobena tím, že Země není koule, nýbrž je na pólech zploštělá[4]. Toto zploštění získala Země, když se nacházela v plastickém stavu, vlivem její rotace, která způsobila odchylku gravitačního zrychlení od tíhového, čímž se její tvar změnil tak, aby její povrch byl v každém místě kolmý ke směru výsledného tíhového zrychlení.

Poslední síla vystupující v rovnici (1.1) je síla *Coriolisova*. Jestliže budeme brát v úvahu pouze sílu gravitační, odstředivou a Coriolisovu, pak můžeme napsat pohybovou rovnici uvažované částice ve tvaru

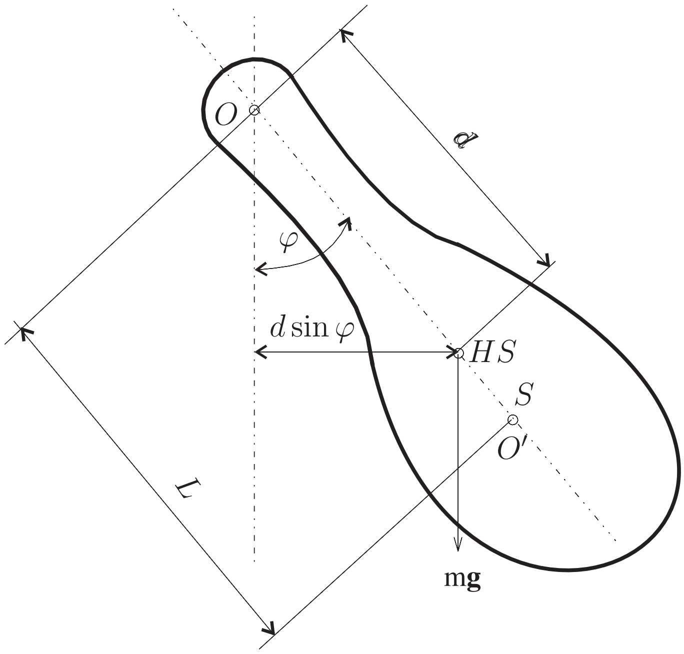
$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{g} + 2\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\omega}_Z \tag{1.11}$$

kde $\boldsymbol{v}'$ je vektor rychlosti částice vzhledem k rotující Zemi a $\boldsymbol{a}'$ reprezentuje zrychlení částice rovněž k rotující Zemi.
V případě, že se těleso pohybuje na severní polokouli vodorovně ve směru poledníku ze severu na jih, bude Coriolisova síla o velikosti

$$F_C = 2mv'\omega_Z \sin\alpha \tag{1.12}$$

[3]Pro Prahu, Karlovo náměstí 13, ČVUT, vychází normální tíhové zrychlení $g_n = 9,81040$ m s^{-2}, přičemž se jedná o zeměpisnou šířku $50°\ 4,67'$ a nadmořskou výšku 223 m. Tuto hodnotu tíhového zrychlení můžeme považovat za tabulkovou hodnotu, která s menšími odchylkami platí pro celou Prahu.

[4]Rovníkový poloměr je přibližně $R_r = 6378,4$ km, kdežto poloměr pólový $R_p = 6356,9$ km.



Obrázek 1.2: Reverzní kyvadlo.

působit směrem na západ[5]. Při pohybu z jihu na sever působí Coriolisova síla směrem na východ. Pro pomalu se pohybující tělesa je tato síla malá, ale mohou se projevit její dlouhodobé účinky, jako je např. podemílání břehů řek tekoucích severojižním směrem nebo opotřebovávání kolejnic jednosměrných tratí.

Pohybuje-li se těleso po rovnoběžce, bude Coriolisova síla mířit kolmo k zemské ose, při pohybu na východ bude odstředivou sílu zvětšovat, při pohybu na západ zmenšovat o $2mv'\omega$ a nebude záviset na zeměpisné šířce. Tíhové zrychlení tělesa při pohybu v rovnoběžkovém směru bude mít velikost

$$g' = a_g - (R_Z\omega_Z^2 \cos\alpha' \pm 2v'\omega_Z)\cos\alpha \ . \tag{1.13}$$

Vzhledem k tomu, že námi uvažované rychlosti budou malé, můžeme Coriolisovu sílu zanedbat.

1.2.2 Reverzní kyvadlo

Tíhové zrychlení je v daném bodě pro všechna tělesa stejné. K jeho určení lze využít reverzního kyvadla, které je zvláštním typem fyzického kyvadla. *Fyzické kyvadlo* (viz obr.1.2) je tuhé těleso, které se v tíhovém poli otáčí (kýve) kolem pevné vodorovné osy neprocházející jeho hmotným středem (těžištěm[6]) HS.

Na kyvadlo působí moment tíhové síly

$$M = -mgd\sin\varphi \ , \tag{1.14}$$

kde m je hmotnost kyvadla, d je vzdálenost těžiště od osy otáčení a φ je okamžitá výchylka z rovnovážné polohy. Znaménko minus značí, že tento moment působí proti výchylce, t.j. snaží se kyvadlo vrátit do rovnovážné polohy. Pro těleso otáčející se kolem pevné osy platí pohybová rovnice

[5] Na jižní polokouli je směr Coriolisovy síly opačný.
[6] V homogenním tíhovém poli těžiště a hmotný střed jedno jest.

v následujícím tvaru

$$J\varepsilon = J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = M \; , \tag{1.15}$$

kde ε je úhlové zrychlení kyvadla a J je moment setrvačnosti kyvadla kolem zvolené osy. Dosadíme-li do rovnice (1.15) z rovnice (1.14) za M, pro naše kyvadlo získáme pohybovou rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{mgd}{J}\sin\varphi = 0 \; . \tag{1.16}$$

Řešení nelineární diferenciální rovnice (1.16) je obecně dáno *eliptickým integrálem* (viz např. [5]). V případě, že rozvineme tento integrál v řadu, pak dostaneme pro dobu kyvu $\tau_{\varphi_m} = T_{\varphi_m}/2$ (T_{φ_m} je doba kmitu) při amplitudě rozkyvu φ_m následující vztah (viz např. [2])

$$\tau_{\varphi_m} = \tau_0 \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\varphi_m}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\varphi_m}{2} + \; \ldots \right] , \tag{1.17}$$

kde $\tau_0 = T_0/2 = \pi\sqrt{J/mgd}$ představuje dobu kyvu, jakou by mělo těleso, kdyby kývalo přesně harmonicky. Ze vztahu (1.17) je tedy zřejmé, že pohyb kyvadla není přesně harmonický. K určení teoretické doby kyvu τ_0, pak vyjdeme ze vztahu (1.17), přičemž zpravidla vystačíme s uvažováním prvních dvou členů.

$$\tau_0 \simeq \frac{\tau_{\varphi_m}}{1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_m}{2}} \; . \tag{1.18}$$

Avšak pro malé rozkyvy z rovnovážné polohy můžeme položit $\sin\varphi \approx \varphi$, (pro $\varphi = 5^\circ$ se dopouštíme chyby asi $0,05\%$), čímž získáme následující jednoduchou lineární diferenciální rovnici, pro kterou platí, že $\tau_{\varphi_m} = \tau_0$

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\varphi = 0 \; , \tag{1.19}$$

kde $\omega_0^2 = mgd/J$ je kvadrát kruhové frekvence kyvadla. Doba kyvu (polovina doby kmitu) je pak rovna[7]

$$\tau_0 = \frac{T_0}{2} = \pi\sqrt{\frac{J}{mgd}} \; . \tag{1.20}$$

Řešením rovnice (1.19) s ohledem na počáteční podmínky

$$\varphi(t=0) = \varphi_m \; , \quad \left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$$

je

$$\varphi = \varphi_m \cos\omega t \; . \tag{1.21}$$

Zaveďme nyní pojem *matematického kyvadla* jako hmotného bodu o hmotnosti m zavěšeného na tuhém nehmotném vláknu délky l. Moment setrvačnosti takového kyvadla je $J = ml^2$. Ze vztahu (1.20) získáme dobu kyvu

$$\tau_0 = \pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \; . \tag{1.22}$$

Všimněme si, že doba kyvu matematického kyvadla nezávisí na hmotnosti hmotného budu m. Srovnáme-li výrazy (1.20) a (1.22), je zřejmé, že délce l matematického kyvadla odpovídá u fyzického kyvadla výraz

$$L = \frac{J}{md} \; . \tag{1.23}$$

[7] Pro malé rozkyvy je tedy kyvadlo *izochronní*, tj. jeho perioda nezávisí na amplitudě.

Veličinu L nazýváme *redukovaná délka fyzického kyvadla*. **Redukovaná délka fyzického kyvadla se rovná délce matematického kyvadla, které má stejnou dobu kyvu jako dané fyzické kyvadlo**[8].

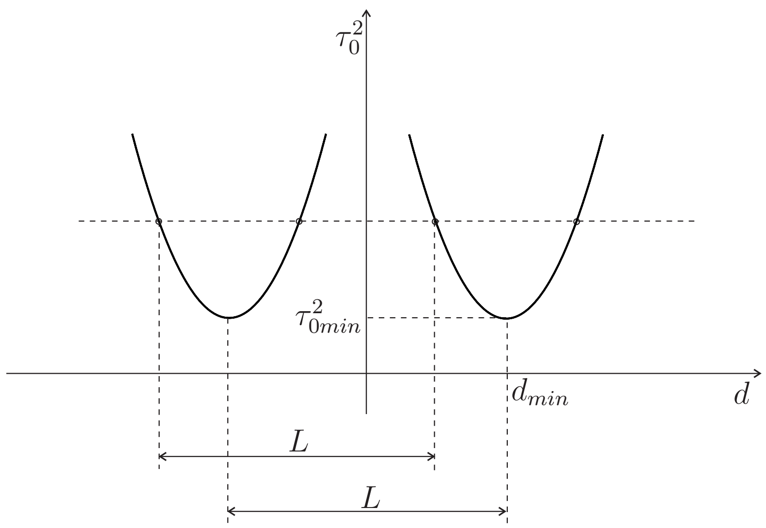
Pro dobu kyvu fyzického kyvadla můžeme psát, že

$$\tau_0 = \pi \sqrt{\frac{L}{g}} \,. \tag{1.24}$$

Je-li J_0 moment setrvačnosti fyzického kyvadla vzhledem k ose otáčení jdoucí těžištěm kyvadla, potom pro moment setrvačnosti J vzhledem k ose O s ní rovnoběžné podle *Steinerovy věty* platí, že

$$J = J_0 + md^2 \,. \tag{1.25}$$

Připomeňme, že m značí hmotnost fyzického kyvadla a d vzdálenost těžiště od osy otáčení.



Obrázek 1.3: Závislost čtverce doby kyvu τ_0 na vzdálenosti d těžiště od osy otáčení.

Na obr. 1.3 je znázorněna závislost čtverce doby kyvu τ_0 na vzdálenosti d těžiště od osy otáčení, tedy funkce

$$\tau_0^2 = \pi^2 (J_0 + md^2)/mgd \,. \tag{1.26}$$

Z tohoto obrázku je patrno, že bude-li kyvadlo zavěšeno velmi blízko nebo velmi daleko od těžiště, bude doba kyvu příliš velká. Existuje vzdálenost na obou stranách těžiště, kdy bude doba kyvu nejmenší, těleso tedy bude kývat nejrychleji. Tuto vzdálenost nalezneme, když zjistíme minimum funkce (1.26), které se rovná

$$d_{min} = \sqrt{\frac{J_0}{m}} \,. \tag{1.27}$$

Když v rovnici (1.25) budeme uvažovat vzdálenost d_{min} a podělíme ji hmotností m, za podíl J_0/m dosadíme d_{min} na základě rovnosti (1.27), tak po úpravě dostaneme, že

$$d_{min} = \sqrt{\frac{J}{2m}} \,. \tag{1.28}$$

[8] Uvedené vztahy platí jen pro netlumené kmity. Doba kyvů tlumených je o něco delší. Při malém útlumu lze však tuto změnu pomíjet.

Uvažováním minimální délky d_{min} ve vztahu (1.23) a využitím rovnosti (1.28) po úpravě dostaneme, že

$$d_{min} = \frac{L}{2}\,, \tag{1.29}$$

tedy právě polovině redukované délky. Odtud redukovanou délku kyvadla můžeme tedy určit jako

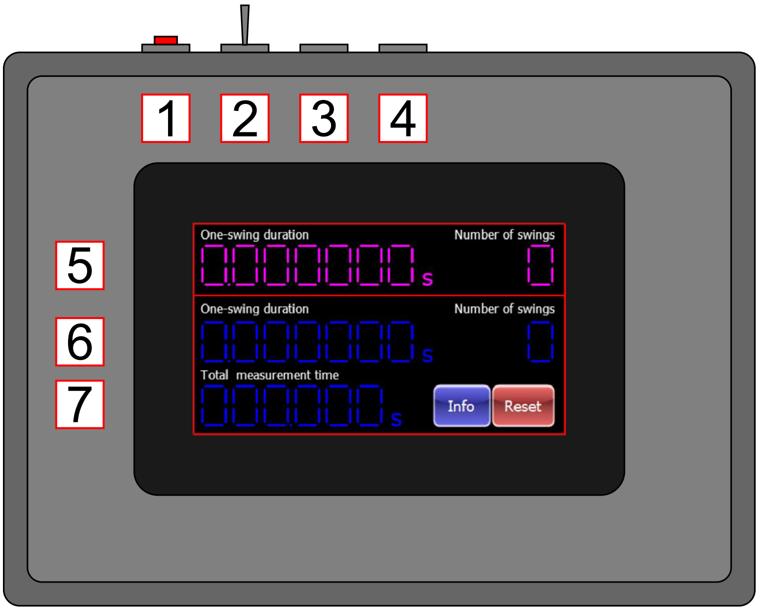
$$L = 2d_{min}\,. \tag{1.30}$$

Vidíme z obr. 1.3, že pro danou dobu kyvu $\tau_0 > \tau_{0_{min}}$ existují právě čtyři způsoby zavěšení kyvadla, vždy dvě na každé straně od těžiště, pro které vychází stejná doba kyvu. Najdeme-li polohu dvou os na opačných stranách těžiště, a to nikoli symetrickou, při nichž je doba kyvu stejná, bude vzdálenost těchto os rovna redukované délce. Takové dvě osy se nazývají *sdružené*.

Z této skutečnosti vychází i konstrukce tzv. *reverzního kyvadla*, které tvoří kovová tyč se dvěma osami O, O', vytvořenými břity trojbokých hranolů ostřím proti sobě obrácenými. Po tyči se může pohybovat těžká čočka. Vyhledáme takovou polohu čočky, při níž kyvadlo kýve na obou osách se stejnou dobou kyvu. Potom vzdálenost os $OO' = L$ určuje redukovanou délku kyvadla, příslušnou době kyvu τ_0, pro niž platí vztah (1.24). Změříme-li τ_0 a L, můžeme ze vztahu (1.24) vypočítat tíhové zrychlení g podle vztahu

$$g = \frac{\pi^2 L}{\tau_0^2}\,. \tag{1.31}$$

Reverzním kyvadlem dostaneme pro g přesnější hodnotu než matematickým kyvadlem, které je v praxi těžko realizovatelné. Reverzní kyvadlo je podstatnou součástí tzv. *gravimetrických přístrojů* k určování tíhového zrychlení g a jeho změn v okolí např. velkých rudných ložisek v kůře zemské.



Obrázek 1.4: Čítač kyvů. 1 – tlačítko pro reset mikrokontroléru, 2 – vypínač, 3 – konektor napájení 5 V, 4 – konektor pro připojení světelné závory, 5 – displej pro zobrazení doby kyvu spočtené z 10, 20, 25, 50, 100, 200, 250, 300, . . . , kyvů, 6 – displej pro zobrazení doby kyvu spočtené z N kyvů, 7 – displej pro zobrazení doby trvání N kyvů.

1.3 Postup měření

1. Zapněte čítač kyvů.

2. Zavěste kyvadlo v poloze s čočkou dole nastavenou na nejkratší vzdálenost od břitu. Nezapomeňte vždy *lehce* dotáhnout pojišťovací matku. Kyvadlo vychylte z rovnovážné polohy k levému dorazu, aniž by se ho však dotýkalo a pusťte jej.
3. Následně v libovolném okamžiku stiskněte tlačítko „RESET“ na dotykovém displeji čítače. Čítač kyvů se vynuluje a od prvního průchodu rovnovážnou polohou začne měřit čas a počítat kyvy.
4. Odečtěte čas[9] $100\tau_{0d}$. Kyvadlo zavěste v poloze s čočkou nahoře, opět ho vychylte k levému dorazu a odečtěte čas $100\tau_{0h}$.
5. Zvětšete vzdálenost čočky od břitu o jednu otáčku čočky (stoupání závitu je jeden milimetr) a měření opakujte dle bodů 2., 3. a 4. Naměřené doby kyvu vyneste do grafu jako funkci polohy čočky reverzního kyvadla.
6. V měření pokračujte dokud se křivky vyjadřující závislost τ_{0d} a τ_{0h} na poloze čočky neprotnou.
7. Nachází-li se čočka v poloze, která odpovídá průsečíku obou křivek, pak proveďte ještě jednou měření doby kyvu τ_0 z 500 kyvů podle obou os.
8. Určete průměrnou hodnotu z $500\tau_{0d}$ a $500\tau_{0h}$ a pro ní vypočítejte hodnotu tíhového zrychlení a nejistotu (čítač měří čas s přesností cca $\pm 1\,\mathrm{ms}$).
9. Získané hodnoty porovnejte s tabulkovou hodnotou pro Prahu.

1.4 Literatura

[1] Štoll, I.: Mechanika, skriptum ČVUT, 2003.

[2] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.: Fyzika, VUTIUM-PROMETHEUS, Brno, 2000.

[3] Horák, Z., Krupka, F.: Fyzika, SNTL, Praha, 1976.

[6] Půst, L., Tondl, A.: Úvod do theorie nelineárních a quasiharmonických kmitů a mechanických soustav, ČSAV, Praha, 1956.

[9] Index „d“ se vztahuje k poloze čočky dole, kdežto index „h“ k poloze čočky nahoře.