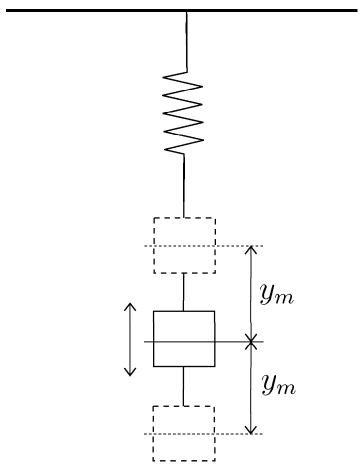
Úloha 1

Spřažená kyvadla

1.1 Úkol měření

1. Změřte tuhost vazbové pružiny.
2. Změřte vlastní kruhovou frekvenci kyvadel.
3. Změřte kruhové frekvence kyvadel, koeficient vazby pro různé počáteční podmínky a různou polohy vazbové pružiny.
4. Proveďte porovnání výsledků mezi naměřenými a vypočtenými výsledky, viz postup měření.
5. Vypočtěte moment setrvačnosti kyvadel.

Nejjednodušším periodickým kmitavým pohybem je takový pohyb, při kterém se hmotný bod pohybuje po přímce. Kmitající bod potom nazýváme lineárním oscilátorem[1]. Lineární oscilátor tvoří např. těleso zavěšené na pružině, viz obr. 1.1. Jestliže neuvažujeme disi-



Obrázek 1.1: Lineární oscilátor.

[1]Zde přívlastek „lineární“ nepředjímá skutečnost, že pohybová rovnice popisující kmitavý pohyb je lineární! Při velkých výchylkách se pružina chová nelineárně, byť se jedná o lineární pohyb.

paci energie (tlumení), pak rovnici popisující pohyb tělesa na pružině můžeme vyjádřit následujícím způsobem

$$\frac{{}^2y}{t^2} = -\frac{k}{m}y \;, \tag{1.1}$$

kde y představuje okamžitou výchylku tělesa (hmotného bodu) z rovnovážné polohy, t je časová proměnná, m je hmotnost zavěšeného tělesa a k je tuhost uvažované pružiny. Zavedeme následující označení

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \;, \tag{1.2}$$

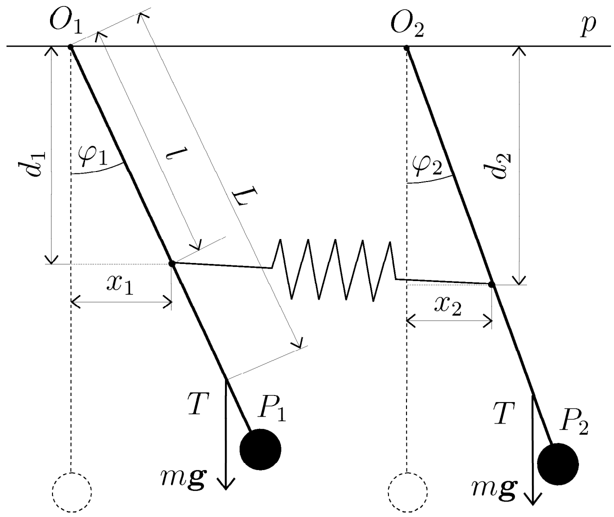
kde ω_0 je tzv. vlastní kruhová frekvence harmonického kmitavého pohybu lineárního oscilátoru popsaného diferenciální rovnicí (1.1), které vyhovuje následující řešení

$$y = y_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \;, \tag{1.3}$$

kde y_m je maximální výchylka (amplituda) tělesa z rovnovážné polohy, φ_0 je fázový posun, udávající počáteční polohu kmitajícího tělesa. Mezi kruhovou frekvencí ω a frekvencí f či periodou T platí známý vztah

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \;. \tag{1.4}$$

Nyní se zaměříme na složitější pohyb dvou stejných spřažených (vázaných) fyzických kyvadel[2], která kývají ve stejné rovině, viz obr. 1.2. Jak je patrné z obrázku, pružná vazba



Obrázek 1.2: Spřažená kyvadla.

mezi uvažovanými kyvadly je realizována pomocí pružiny, mající tuhost k a je pro obě kyvadla umístěna ve stejné vzdálenosti od osy jejich otáčení. Tato vazba má za následek, že může docházet k přenosu energie mezi oběma kyvadly.

Při odvozování rovnic popisujících pohyb výše uvedených spřažených kyvadel budeme vycházet z označení, která jsou uvedena na obr. 1.2, přičemž dopředu přijmeme předpoklad, že se bude jednat o pohyb netlumený, tj. nebudeme uvažovat disipaci (ztrátu) energie vyšetřované mechanické soustavy. Dále budeme předpokládat, že se kyvadla vychýlí ze svých rovnovážných poloh maximálně o úhel $\varphi_m \approx 5°$, což nám dovoluje pro úhly $0 \leq \varphi \leq \varphi_m$

[2]Pohyb samostatného fyzického kyvadla je popsán v úloze č. 2.

s rozumnou chybou nahradit $\sin\varphi \approx \varphi$ a $\cos\varphi \approx 1$. Pro vzdálenosti vazbové pružiny od svislých poloh obou kyvadel P_1 a P_2 můžeme psát

$$x_1 = l\sin\varphi_1 \approx l\varphi_1 \;, \qquad x_2 = l\sin\varphi_2 \approx l\varphi_2 \;, \tag{1.5}$$

kde φ_1, resp. φ_2, je okamžitý úhel vychýlení z rovnovážné polohy kyvadla P_1, resp. P_2 a l je vzdálenost uchycení vazby na kyvadlech od osy jejich otáčení, přičemž předpokládáme, že kolmá vzdálenost d_1, d_2 k přímce p, jež prochází body průsečíku obou kyvadel s jejich osou otáčení se nemění, tj.

$$d_1 = l\cos\varphi_1 \approx l \;, \qquad d_2 = l\cos\varphi_2 \approx l \;. \tag{1.6}$$

Na kyvadlo P_1 působí moment tíhové síly

$$M_{g1} = mgL\sin\varphi_1 \approx mgL\varphi_1 \tag{1.7}$$

a na kyvadlo P_2 působí moment tíhové síly

$$M_{g2} = mgL\sin\varphi_2 \approx mgL\varphi_2 \;. \tag{1.8}$$

Zavedeme-li mezi kyvadla pružnou vazbu, budou na sebe kyvadla působit stejnou silou, ale opačně orientovanou $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$, které jsou úměrné rozdílu výchylek kyvadel z rovnovážných poloh, tj. $F_1 = k(x_1 - x_2) = kl(\varphi_1 - \varphi_2)$ a $F_2 = -k(x_1 - x_2) = -kl(\varphi_1 - \varphi_2)$. Moment síly působící na kyvadlo P_1 vlivem vazby (pružiny) je dán následujícím vztahem

$$M_{P1} = d_1 F_1 = -kl^2(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{1.9}$$

a moment síly působící na kyvadlo P_2 vlivem vazby je

$$M_{P2} = d_2 F_2 = kl^2(\varphi_1 - \varphi_2) \;. \tag{1.10}$$

S přihlédnutím ke vzájemné orientaci jednotlivých vektorových veličin můžeme vzájemný vztah mezi momentem setrvačnosti J fyzického kyvadla, úhlovým zrychlením ε a momenty síly M_g a M_P napsat jako

$$\begin{aligned} J\varepsilon_1 &= -M_{g1} + M_{P1} \;, \\ J\varepsilon_2 &= -M_{g2} + M_{P2} \;. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Využitím definičního vztahu pro úhlové zrychlení $\varepsilon = {}^2\varphi/t^2$ a rovností (1.7), (1.8), (1.9) a (1.10) dostáváme po následné úpravě následující soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{{}^2\varphi_1}{t^2} + \frac{mgL}{J}\varphi_1 + \frac{kl^2}{J}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \;, \\ \frac{{}^2\varphi_2}{t^2} + \frac{mgL}{J}\varphi_2 - \frac{kl^2}{J}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \;. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Označme podíly v (1.12) následujícím způsobem

$$\omega_0^2 = \frac{mgL}{J} \;, \qquad \Omega^2 = \frac{kl^2}{J} \;, \tag{1.13}$$

S přihlédnutím ke vztahům (1.13) je možné soustavu (1.12) vyjádřit v následujícím tvaru

$$
\begin{aligned}
&\frac{{}^2\varphi_1}{t^2} + \omega_0^2\varphi_1 + \Omega^2(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \; , \\
&\frac{{}^2\varphi_2}{t^2} + \omega_0^2\varphi_2 - \Omega^2(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \; . \qquad (1.14)
\end{aligned}
$$

Soustavu (1.14) budeme řešit tak, že rovnice v ní se vyskytující jednou sečteme a jednou odečteme, čímž dostaneme dvě samostatné rovnice pro nové neznámé funkce $\phi_1 = \varphi_1 + \varphi_2$ a $\phi_2 = \varphi_1 - \varphi_2$ ve tvaru

$$\frac{{}^2\phi_1}{t^2} + \omega_0^2\phi_1 = 0 \; , \qquad (1.15)$$

$$\frac{{}^2\phi_2}{t^2} + \omega_1^2\phi_2 = 0 \; , \qquad (1.16)$$

kde $\omega_1^2 = \omega_0^2 + 2\Omega^2$.
Obecné řešení rovnic (1.15) a (1.16) můžeme psát jako

$$\phi_1 = A_1 \sin\omega_0 t + A_2 \cos\omega_0 t \; , \qquad (1.17)$$

$$\phi_2 = B_1 \sin\omega_1 t + B_2 \cos\omega_1 t \; , \qquad (1.18)$$

kde A_1, A_2, B_1 a B_2 jsou integrační konstanty. Dosazením za $\phi_1 = \varphi_1 + \varphi_2$ a $\phi_2 = \varphi_1 - \varphi_2$ do rovností (1.17) a (1.18) obdržíme soustavu rovnic pro proměnné φ_1 a φ_2. Řešíme-li takto vzniklou soustavu, pak dospějeme k následujícím rovnostem

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(A_1 \sin\omega_0 t + A_2 \cos\omega_0 t + B_1 \sin\omega_1 t + B_2 \cos\omega_1 t) \; , \qquad (1.19)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}(A_1 \sin\omega_0 t + A_2 \cos\omega_0 t - B_1 \sin\omega_1 t - B_2 \cos\omega_1 t) \; . \qquad (1.20)$$

Integrační konstanty A_1, A_2, B_1 a B_2 určíme z počátečních podmínek. Víme, že v čase $t = 0$ jsou úhlové rychlosti obou kyvadel nulové, tj. $\varphi_1/t = \varphi_2/t = 0$. Na základě této počáteční podmínky zderivujeme rovnice (1.19) a (1.20) podle času, za čas dosadíme $t = 0$ a položíme je rovné nule, čímž dostaneme následující soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
A_1\omega_0 + B_1\omega_1 &= 0 \\
A_1\omega_0 - B_1\omega_1 &= 0 \; . \qquad (1.21)
\end{aligned}
$$

Vzhledem k tomu, že ω_0 a ω_1 jsou rozdílné od nuly, pak musí platit, že $A_1 = B_1 = 0$.
Nyní s ohledem na znalost konstant A_1, B_1 můžeme soustavu rovnic (1.19) a (1.20) psát v následujícím tvaru

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(A_2 \cos\omega_0 t + B_2 \cos\omega_1 t) \; , \qquad (1.22)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}(A_2 \cos\omega_0 t - B_2 \cos\omega_1 t) \; . \qquad (1.23)$$

Konstanty A_2 a B_2 určíme pro tři různé počáteční podmínky.

a) V čase $t = 0$ vychýlíme obě kyvadla o úhel $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_m$, takže rovnice (1.22) a (1.23) přejdou v následující tvar

$$\varphi_m = \frac{1}{2}(A_2 + B_2) \ , \tag{1.24}$$

$$\varphi_m = \frac{1}{2}(A_2 - B_2) \ . \tag{1.25}$$

Řešením této soustavy zjistíme, že $A_2 = 2\varphi_m$ a $B_2 = 0$. Takže pro okamžité úhly vychýlení obou kyvadel platí, že

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_m \cos \omega_0 t \ . \tag{1.26}$$

Z rovnosti (1.26) vyplývá, že obě kyvadla budou kývat ve fázi, s kruhovým kmitočtem ω_0, se stejnou amplitudou a nebudou si vzájemně předávat pohybovou energii. Mechanická pružná vazba se neuplatní. Kruhový kmitočet ω_0 představuje vlastní kruhový kmitočet nespřažených kyvadel.

b) V čase $t = 0$ vychýlíme kyvadla na opačné strany, takže $\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi_m$. Rovnice (1.22) a (1.23) pro tuto počáteční podmínku budou mít následující tvar

$$\varphi_m = \frac{1}{2}(A_2 + B_2) \ , \tag{1.27}$$

$$-\varphi_m = \frac{1}{2}(A_2 - B_2) \ . \tag{1.28}$$

Řešením této soustavy dostaneme, že $A_2 = 0$ a $B_2 = 2\varphi_m$. Dosazením těchto konstant do soustavy rovnic (1.22) a (1.23) obdržíme následující rovnosti

$$\varphi_1 = \varphi_m \cos \omega_1 t \ , \tag{1.29}$$

$$\varphi_2 = -\varphi_m \cos \omega_1 t \ . \tag{1.30}$$

Obě kyvadla pro tuto počáteční podmínku budou kmitat se stejnou kruhovou frekvencí ω_1, ale jsou vůči sobě vzájemně fázově posunuté o π.

c) V čase $t = 0$ necháme jedno z kyvadel v rovnovážné poloze a druhé vychýlíme o úhel φ_m, např. zvolme $\varphi_1 = 0$ a $\varphi_2 = \varphi_m$. Dosazením do rovnic (1.22) a (1.23) dospějeme k následujícím rovnostem

$$0 = \frac{1}{2}(A_2 + B_2) \ , \tag{1.31}$$

$$\varphi_m = \frac{1}{2}(A_2 - B_2) \ . \tag{1.32}$$

Řešením této soustavy rovnic zjistíme, že $A_2 = \varphi_m$ a $B_2 = -\varphi_m$. Dosadíme-li za tyto konstanty do rovnic (1.22) a (1.23), pak rovnice popisující pohyb jednotlivých kyvadel budou mít následující tvar

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_m}{2}(\cos \omega_0 t - \cos \omega_1 t) \ , \tag{1.33}$$

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_m}{2}(\cos \omega_0 t + \cos \omega_1 t) \ . \tag{1.34}$$

Tyto rovnice můžeme dále upravit použitím vzorce pro součet a rozdíl kosinů, takže po následné úpravě přejdou v následující tvary

$$\varphi_1 = \varphi_m \sin\frac{\omega_1 - \omega_0}{2} t \sin\frac{\omega_1 + \omega_0}{2} t \ , \tag{1.35}$$

$$\varphi_2 = \varphi_m \cos\frac{\omega_1 - \omega_0}{2} t \cos\frac{\omega_1 + \omega_0}{2} t \ , \tag{1.36}$$

Označíme-li $\omega_2 = (\omega_1 - \omega_0)/2$ a $\omega_3 = (\omega_1 + \omega_0)/2$, pak můžeme psát, že

$$\varphi_1 = \varphi_m \sin\omega_2 t \sin\omega_3 t \ , \tag{1.37}$$

$$\varphi_2 = \varphi_m \cos\omega_2 t \cos\omega_3 t \ . \tag{1.38}$$

Jestliže je vazba slabá, jsou si frekvence ω_0 a ω_1 blízké, takže lze považovat rovnice (1.37) a (1.38) za rovnice harmonických kmitů s frekvencí ω_3, jejichž amplituda se periodicky mění s frekvencí ω_2. Jelikož amplituda funkce φ_1 se mění jako $\sin[(\omega_1 - \omega_0)t/2]$ a amplituda funkce φ_2 jako $\cos[(\omega_1 - \omega_0)t/2]$, takže když funkce φ_1 dosahuje svého maxima, pak φ_2 dosahuje svého minima a naopak. Mluvíme proto v tomto případě o periodické výměně (sdílení) energie mezi oběma kyvadly. Periodicky se měnící amplituda harmonických kmitů vytváří tzv. rázy.

Pro vyjádření vazby můžeme definovat následující poměr

$$\kappa = \frac{kl^2}{mgL + kl^2} \ , \tag{1.39}$$

který nazýváme koeficient vazby. Na základě vztahů (1.13) můžeme psát, že

$$\kappa = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2 + \Omega^2} = \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{\omega_1^2 + \omega_0^2} \ . \tag{1.40}$$

Koeficient vazby κ je možné vyjádřit i následujícím způsobem

$$\kappa = \frac{2\omega_2\omega_3}{\omega_2^2 + \omega_3^2} \ . \tag{1.41}$$

Použitím vztahů (1.39), (1.40) a (1.41) můžeme psát, že

$$\omega_1^2 = \frac{2k\omega_0^2}{mgL} l^2 + \omega_0^2 \ , \quad \omega_2 = \frac{k\omega_0}{2mgL} l^2 \ , \quad \omega_3 = \frac{k\omega_0}{2mgL} l^2 + \omega_0 \ . \tag{1.42}$$

1.2 Postup měření

1. Odstraňte opatrně pružnou vazbu (pružinu) z kyvadel.

2. Zapněte oba čítače kyvů se stopkami síťovým přepínačem a druhý přepínač přepněte do polohy „START“. Obě kyvadla vychylte z rovnovážné polohy k levým značkám, příp. dorazům. Poté kyvadla uvolněte.

3. Následně v libovolném okamžiku stiskněte tlačítko „NULOVÁNÍ“ u obou čítačů. Čítač kyvů se vynuluje a od prvního průchodu rovnovážnou polohou začne měřit čas a počítat kyvy. Při každém stém kyvu zůstane na displeji času zobrazen čas stého kyvu po dobu asi 5 s ($100\tau_0$).

4. Změřte čas jednoho sta kyvů u obou kyvadel a porovnejte je. V případě, že se takto změřené časy u kyvadel neshodují, je nutné posunout čočku u jednoho z nich patřičným směrem tak, aby se dosáhlo časové shody. Provedeme opětovné měření doby jednoho sta kyvů. V případě, že se časy shodují, můžeme pokládat obě fyzická kyvadla za identická a zaznamenáme si naměřený čas, ze kterého posléze určíme kruhový kmitočet ω_0.

5. Pružinu zavěsíme na přípravek určený k měření protažení pružiny. Na pružinu zavěsíme jedno závaží[3] o hmotnosti M a odečteme jeho polohu. Poté přiložíme další závaží o stejné hmotnosti a opět odečteme polohu prvního z nich. Z rozdílu poloh určíme protažení pružiny Δy. Ze vztahu $k = (2M - M)g/\Delta y$ vypočítáme tuhost pružiny k. Pomocí vztahu (1.2) určete jakou kruhovou frekvencí by kmitalo kolem rovnovážné polohy jedno z použitých závaží.

6. Ze závěsu opatrně sejmeme fyzické kyvadlo č. 1 a na laboratorních vahách ho zvážíme.

7. Určíme přibližně polohu těžiště[4] T kyvadla č.1.

8. Zavěste kyvadlo a opět připevněte vazbovou pružinu ke kyvadlům tak, aby oba její konce byly stejně vzdáleny od osy otáčení a pružina nevychylovala kyvadla z jejich rovnovážných poloh. Dbejte rovněž na to, aby pružina nebyla zbytečně prohnutá. Umístěte pružinu zhruba doprostřed fyzického kyvadla. Změřte polohu pružiny l vůči ose otáčení použitých kyvadel.

9. Zvolíme počáteční podmínky a), tj. vychýlíme obě kyvadla na stejnou stranu k vyznačeným značkám o úhel φ_m a pustíme. Dbáme vždy na to, aby kyvadla kývala ve stejné rovině! Změříme dobu sta kyvů způsobem zmíněným ve výše uvedených bodech. Z naměřeného času určíme kruhový kmitočet ω_0. Tento kruhový kmitočet porovnáme s naměřeným kruhovým kmitočtem v bodě 4).

10. Zvolíme počáteční podmínky b), tj. vychýlíme obě kyvadla o stejnou výchylku φ_m na opačné strany (opět k vyznačeným značkám) a pustíme. Opět změříme dobu sta kyvů a vypočítáme kruhovou frekvenci ω_1.

11. Zvolíme počáteční podmínky c), tj. vychýlíme kyvadlo č. 2 z rovnovážné polohy doprava k příslušné značce (o úhel φ_m) a kyvadlo č.1 podržíme v jeho rovnovážné poloze. Kyvadla pustíme, přičemž dobu kyvu kyvadla č. 2 měříme pomocí čítače kyvů, kdežto u kyvadla č. 1 budeme měřit pomocí stopek periodu rázů. Periodu rázů zjistíme tak, že budeme měřit dobu po puštění kyvadel, za kterou kyvadlo č. 1 dosáhne šestého minima nebo osmého minima. Z této doby, pak určíme kruhový kmitočet ω_2. Z doby sta kyvů kyvadla č. 2 určíme kruhovou frekvenci ω_3.

12. Měření popsaná v bodech 9), 10) a 11) opakujeme (alespoň jedenkrát) pro jiné vzdálenosti vazbové pružiny od osy otáčení l.

---

[3] Jedná se o závaží opatřené háčky.

[4] Polohu těžiště můžeme určit např. tím, že se pokusíme jeho podepřením (např. opěrkou židle) najít jeho rovnováhu. Pomocí ocelového měřítka pak změříme vzdálenost těžiště L od osy otáčení.

13. Spočítejte koeficient vazby κ pomocí kruhových frekvencí ω_0, ω_1 a ω_2, ω_3 podle vztahů (1.40) (1.41). Takto vypočtené výsledky mezi sebou porovnejte z hlediska přesnosti. Vypočtený koeficient vazby dosaďte do vztahu (1.39) a vypočítejte z něho tuhost k vazbové pružiny. Porovnejte výsledek s výsledkem získaným v bodě 5). Na základě vztahů (1.42) vypočítejte příslušné kruhové frekvence ω_1, ω_2, ω_3 a porovnejte je s hodnotami naměřenými.

14. Na základě vztahu (1.13) a znalosti vlastní kruhové frekvence kyvadel ω_0 určete moment setrvačnosti kyvadel J.

15. Vyhodnoťte vliv polohy vazbové pružiny od osy otáčení kyvadel.

1.3 Použité přístroje

Dvě fyzická kyvadla, dva závěsy s optickým snímačem, vazbová pružina, dva čítače kyvů se stopkami, stopky, pravítko, ocelové měřítko, přípravek k měření protažení pružiny se dvěma závažími, laboratorní váhy se sadou závaží.

1.4 Kontrolní otázky

1. Co je to lineární oscilátor.

2. Kdy spřažená kyvadla kmitají vlastní kruhovou frekvencí ω_0?

3. Kdy spřažená kyvadla kmitají kruhovou frekvencí ω_1?

4. Za jakých podmínek dochází k rázům?

1.5 Použitá literatura

[1] Štoll, I.: Mechanika, skriptum ČVUT, 2003.

[2] Brož, J.: Základy fyzikálních měření, SPN, Praha, 1967.

[3] Nevzgljadov, V., G.: Teoretičeskaja mechanika, FIZMATGIZ, Moskva, 1959.

[4] University Laboratory Experiments - Physics, PHYWE, Goettingen, 1994.

[5] Hajossy, R.: Fyzikálne praktikum I, MFF Univ. Komenského, Bratislava, 1988.