Kapitola 1

Studium srážek těles na vzduchové dráze

1.1 Úkol měření

Cílem této úlohy je studium dokonale pružných a dokonale nepružných srážek těles pohybujících se bez tření na vodorovné vzduchové dráze. Pro různé poměry hmotností těles určete jejich kinetické energie a hybnosti před a po srážce.

1.2 Teoretický úvod

1.2.1 Srážky těles

Pod vlivem působících sil se tělesa plynule pohybují ve shodě s pohybovými zákony. Pokud si dvě nebo více těles v pohybu navzájem překáží, dochází k jejich srážce, tedy rychlé změně velikostí a směrů pohybu těchto těles.

Pojem srážky je velice obecný. Můžeme hovořit například o srážce automobilů, srážce galaxií, srážce elementárních částic, přičemž je zřejmé, že průběhy a mechanizmy těchto srážek jsou různé a probíhají při nich rozdílné procesy.

Srážku pevných a pružných těles také nazýváme rázem těles. Během velice krátkého rázu vznikají v místě dotyku těles ohromné nárazové síly, které právě způsobují prudkou změnu jejich pohybu, mohou způsobit jejich deformaci, případně i roztříštění. Vzhledem ke značným velikostem nárazových sil můžeme obvykle působení ostatních sil během rázu zanedbat.

Pokud při srážce těles platí zákon zachování kinetické energie, hovoříme o *pružné (dokonale pružné) srážce*, pokud neplatí, hovoříme o *srážce nepružné*. Pokud po srážce nedojde k žádnému odpružení těles a ta zůstanou spojená, hovoříme o *dokonale nepružné srážce*.

1.2.2 Zákony zachování

Pokud neznáme přesný mechanizmus srážek těles (jejich vzájemné silové interakce), nemůžeme jednoznačně předpovědět jejich výsledek. Záleží totiž na tvaru těles, jejich pružnosti, drsnosti povrchu a podobně. Vzájemné síly, jimiž na sebe tělesa v průběhu srážky působí, jsou vnitřními silami, silami akce a reakce. Vzhledem k faktu, že v průběhu srážky můžeme působení vnějších sil zanedbat, tvoří srážející se tělesa izolovanou vztažnou soustavu a platí pro ně zákon zachování hybnosti. Aniž bychom tedy znali cokoliv bližšího o mechanizmu srážky, můžeme pro srážku dvou těles psát zákon zachování hybnosti

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2, \tag{1.1}$$

tedy celková hybnost dvou těles před srážkou je rovna jejich celkové hybnosti po srážce. Zde m_i jsou hmotnosti těles, $\boldsymbol{v}_i$ jsou jejich rychlosti před srážkou a $\boldsymbol{v}'_i$ jsou jejich rychlosti po srážce ($i = 1, 2$).

Při pružné srážce bude navíc platit i zákon zachování kinetické energie, který má tvar

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2, \tag{1.2}$$

tedy celková kinetická energie uvažovaných těles před srážkou se rovná celkové kinetické energii těles po srážce. Zde $v_i^2 = \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i$ je kvadrát velikosti rychlosti těles.

Rovnice (1.1) a (1.2) tvoří soustavu čtyř rovnic pro šest neznámých složek rychlosti $\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2$ po srážce a nepopisují tedy obecnou pružnou srážku jednoznačně. Ani v případě rovinného problému není počet rovnic dostatečný. Pouze v případě lineárního problému (rychlosti před i po srážce leží na jedné přímce - hovoříme o lineární srážce) máme dvě rovnice pro dvě neznámé a pružnou srážku tak můžeme popsat jednoznačně, a to bez ohledu na mechanizmus srážky.

V dalším textu se budeme zabývat dokonale pružnou a dokonale nepružnou lineární srážkou dvou těles, přičemž jedno z nich (terčové těleso) bude před srážkou vždy v klidu.

1.2.3 Lineární dokonale pružná srážka

Zákon zachování hybnosti a energie mají v tomto případě tvar

$$\begin{aligned} m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1v'_1 + m_2v'_2, & (1.3\text{a}) \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2, & (1.3\text{b}) \end{aligned}$$

kde v_1, v_2, v'_1 a v'_2 jsou orientované velikosti rychlostí, tedy příslušné složky vektorů rychlosti ve směru přímky, podél níž ráz probíhá. Vzhledem k tomu, že uvažujeme druhé těleso v klidu, můžeme psát $v_2 = 0$, $v_1 = v$ a dále zavedeme veličinu $\mu = m_1/m_2$. Rovnice (1.3) přejdou do tvaru

$$\begin{aligned} \mu v &= \mu v'_1 + v'_2, & (1.4\text{a}) \\ \mu v^2 &= \mu v_1'^2 + v_2'^2 & (1.4\text{b}) \end{aligned}$$

Z rovnice (1.4a) vyjádříme rychlost $v'_2 = \mu(v - v'_1)$ a po dosazení do rovnice (1.4b) dostaneme

$$\mu(v^2 - v_1'^2) = \mu^2(v - v'_1)^2 \quad \Rightarrow \quad \mu(v - v'_1)(v + v'_1) = \mu^2(v - v'_1)(v - v'_1). \tag{1.5}$$

Jedním z řešení rovnice (1.5) je $v'_1 = v$, po dosazení do (1.4a) dostaneme $v'_2 = 0$, odkud vidíme, že toto řešení popisuje situaci ještě před srážkou, z tohoto důvodu pro nás není zajímavé a nebudeme se jím nadále zabývat. Po vydělení rovnice (1.5) vztahem $\mu(v - v'_1) \neq 0$ dostaneme

$$v'_1 = \frac{\mu - 1}{\mu + 1}v \tag{1.6}$$

a po dosazení do (1.4a)

$$v'_2 = \frac{2\mu}{\mu + 1}v \tag{1.7}$$

V závislosti na poměru hmotností $\mu = m_1/m_2$ z řešení (1.6) a (1.7) vyplývají následující závěry:

- Pokud $\mu > 1, (m_1 > m_2)$, potom platí[1]: $\text{sign}(v'_1) = \text{sign}(v'_2) = \text{sign}(v)$, tedy obě tělesa se po srážce budou pohybovat stejným směrem jako první těleso před srážkou. Pokud $\mu \gg 1, (m_1 \gg m_2)$, bude po srážce $v'_1 \approx v$ (první těleso bude pokračovat téměř nezměněnou rychlostí) a $v'_2 \approx 2v$ (druhé těleso bude urychleno téměř na dvojnásobek rychlosti prvního tělesa).

[1]Funkce sign (signum=znaménko) je definována takto: $\text{sign}(x) = 1$ pro $x \geq 0$, $\text{sign}(x) = -1$ pro $x < 0$.

- Pokud $\mu = 1, (m_1 = m_2)$, potom platí: $v_1' = 0$, $v_2' = v$, tedy po srážce se první těleso zastaví a druhé se bude pohybovat stejnou rychlostí, jakou se pohybovalo první těleso před srážkou (tělesa si vymění hybnosti).

- Pokud $\mu < 1, (m_1 < m_2)$, potom platí: $-\mathrm{sign}(v_1') = \mathrm{sign}(v_2') = \mathrm{sign}(v)$, tedy první těleso po srážce změní směr rychlosti (odrazí se zpět), druhé těleso se po srážce bude pohybovat stejným směrem, jako první těleso před srážkou. Pokud $\mu \approx 0, (m_1 \ll m_2)$, potom $v_1' \approx -v$, $v_2 \approx 0$, tedy první těleso se se stejnou rychlostí odrazí zpět a druhé zůstane v klidu.

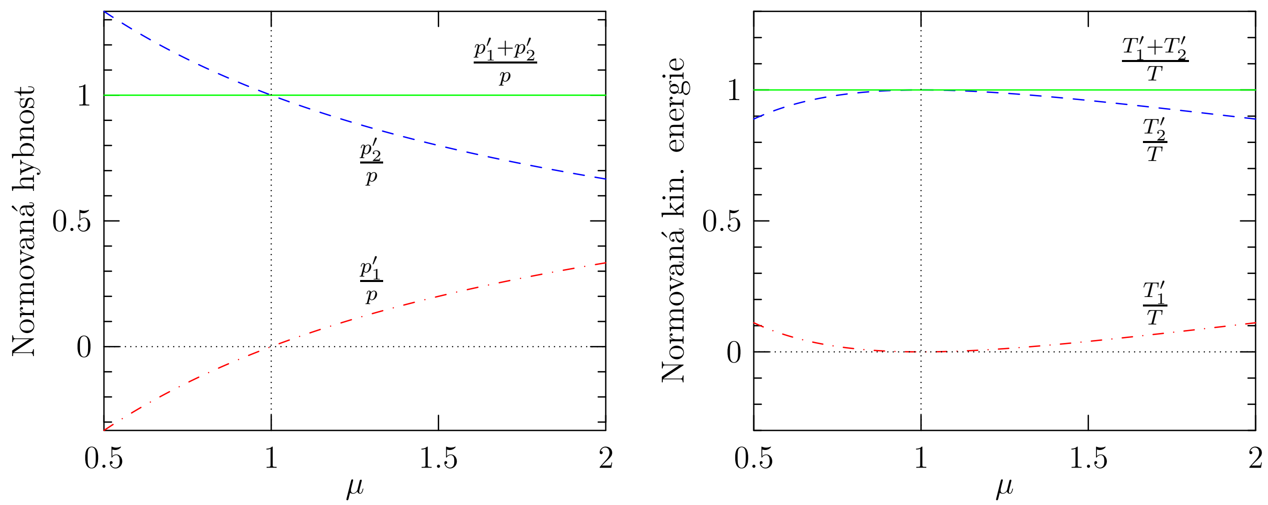
Pro hybnosti těles po srážce ze vztahů (1.6) a (1.7) dostaneme

$$p_1' = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} p, \qquad p_2' = \frac{2}{\mu + 1} p, \tag{1.8}$$

pro kinetické energie

$$T_1' = \left(\frac{\mu - 1}{\mu + 1} \right)^2 T, \qquad T_2' = \frac{4\mu}{(\mu + 1)^2} T. \tag{1.9}$$

Samozřejmě platí, že $p_1' + p_2' = p$ a $T_1' + T_2' = T$.



Obrázek 1.1: Normované hybnosti a kinetické energie jednotlivých těles po pružné srážce v závislosti na parametru μ.

Dále vypočítáme, za jakých podmínek (pro jaký poměr hmotností pro dané T) předá pružnou srážkou první těleso druhému největší množství energie. Derivováním koeficientu u pravé z rovnic (1.9) dostaneme[2]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} \left[\frac{4\mu}{(\mu + 1)^2} \right] = -\frac{4(\mu - 1)}{(\mu + 1)^3} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mu = 1. \tag{1.10}$$

Druhé těleso tedy získá maximální kinetickou energii tehdy, bude-li hmotnost obou těles stejná $(m_1 = m_2)$ a bude platit $T_2' = T$, $T_1' = 0$.

1.2.4 Lineární dokonale nepružná srážka

Dále se budeme zabývat případem, kdy se tělesa srazí nepružně takovým způsobem, že se navzájem spojí a tedy $v_1' = v_2' = v'$. V tomto případě nemůžeme k popisu srážky využít zákon zachování

[2] Pro $\mu < 1$ je první derivace kladná, funkce je zde tedy rostoucí, pro $\mu > 1$ je první derivace záporná, funkce je zde tedy klesající. Odtud vyplývá, že se jedná o maximum.

kinetické energie, neboť část energie se spotřebuje na plastickou deformaci a případně ohřátí těles. Zákon zachování hybnosti však platí a můžeme psát (opět uvažujeme, že druhé těleso je před srážkou v klidu, tedy $v_2 = 0$ a opět označíme $v_1 = v$)

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad \Rightarrow \quad m_1 v = (m_1 + m_2) v' \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{\mu}{\mu + 1} v. \tag{1.11}$$

Pro hybnosti (spojených) těles po srážce tak dostáváme

$$p_1' = \frac{\mu}{\mu + 1} p, \qquad p_2' = \frac{1}{\mu + 1} p, \tag{1.12}$$

přičemž opět platí, že $p_1' + p_2' = p$. Pro kinetické energie těles po srážce platí

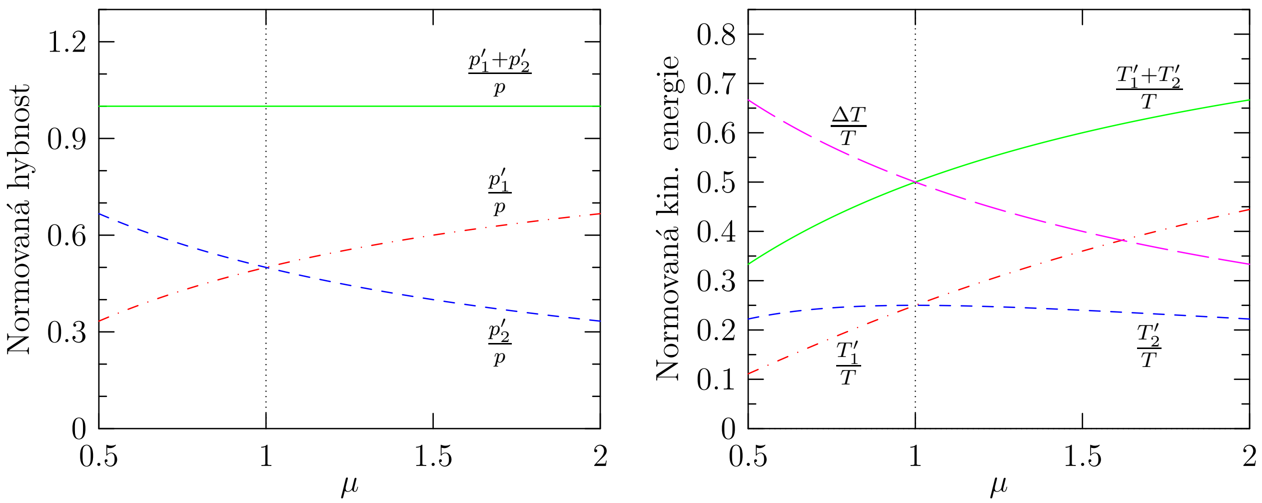
$$T_1' = \left(\frac{\mu}{\mu + 1} \right)^2 T, \qquad T_2' = \frac{\mu}{(\mu + 1)^2} T. \tag{1.13}$$

Při nepružné srážce se část kinetické energie spotřebuje na plastickou deformaci, takže $T_1' + T_2' \neq T$. Velikost této energie (deformační práci) vypočteme jako

$$\Delta T = T - (T_1' + T_2') = \frac{1}{\mu + 1} T. \tag{1.14}$$

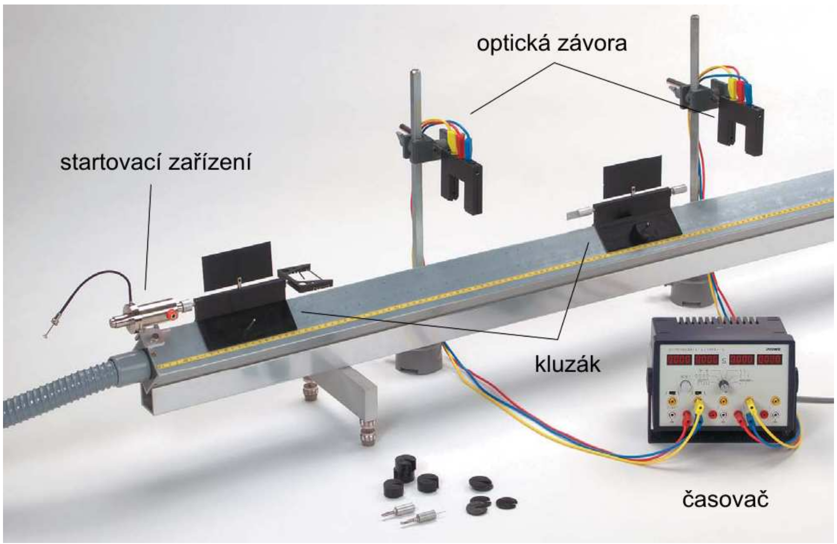
Odtud je vidět, že

- pokud $m_1 \gg m_2$ ($\mu \gg 1$), pak $\Delta T \approx 0$, tedy pouze minimum kinetické energie se spotřebuje v nepružné srážce,
- pokud $m_1 = m_2$ ($\mu = 1$), pak $\Delta T = T/2$, tedy právě polovina kinetické energie se spotřebuje v nepružné srážce,
- pokud $m_1 \ll m_2$ ($\mu \approx 0$), pak $\Delta T \approx T$, tedy téměř veškerá kinetická energie se spotřebuje v nepružné srážce.



Obrázek 1.2: Normované hybnosti a kinetické energie jednotlivých těles po nepružné srážce v závislosti na parametru μ.

1.3 Pokyny pro měření



Obrázek 1.3: Vzduchová dráha pro studium srážek těles.

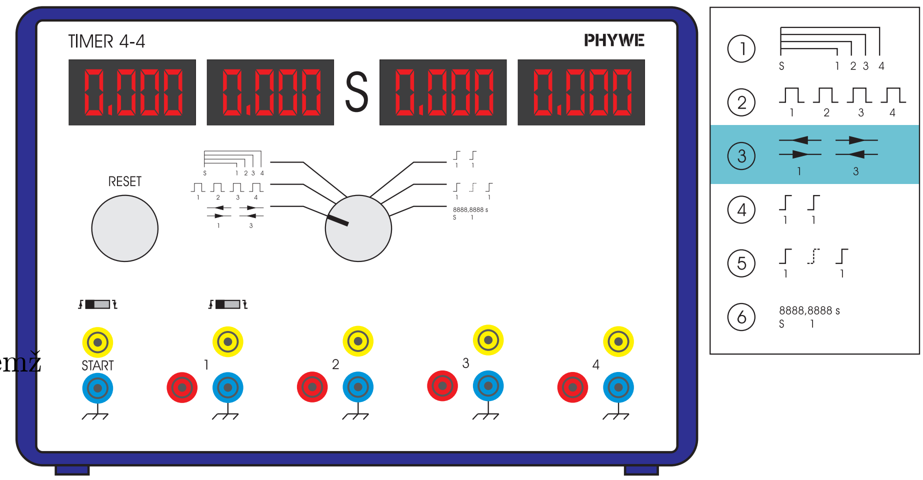
Cílem této úlohy je ověření platnosti vztahů pro přerozdělení hybností a kinetických energií těles v závislosti na poměru jejich hmotností $\mu = m_1/m_2$ při lineární dokonale pružné srážce a lineární dokonale nepružné srážce (vztahy (1.8), (1.9), (1.12) a (1.13)).

Výše uvedené vzorce byly odvozeny za předpokladu, že během velmi krátké srážky můžeme zanedbat všechny vnější síly a srážející se tělesa považovat za izolovanou vztažnou soustavu. Aby bylo možné změřit rychlosti těles před a po srážce, je experiment umístěn na vodorovné vzduchové dráze, viz obr. 1.3. Vzduchová dráha je umístěna vodorovně, takže tíhová síla nepůsobí ve směru pohybu těles (kluzáků). Ta se pohybují téměř bez tření na vzduchovém polštáři, takže jejich pohyb před a po srážce je rovnoměrný (pohybují se konstantními rychlostmi).

1.3.1 Zapojení a nastavení experimentu

Zkontrolujte, zda je startovací zařízení na konci vzduchové dráhy otočeno pohyblivým koncem směrem ke vzduchové dráze. Pokud ne, uvolněte upínací šrouby a otočte jej.

Propojte startovací zařízení na konci vzduchové dráhy se svorkami časovače, viz obr. 1.4, označenými **START**, přičemž červená zdířka na startovacím zařízení odpovídá žluté zdířce na čítači. Připojte optické závory ke svorkám časovače **1** a **3** tak, aby si příslušné barvy navzájem odpovídaly. Ke svorkám **1** připojte závoru blíže startovacímu zařízení. Otočný přepínač režimu časovače přepněte do polohy **3**. Oba posuvné přepínače přepněte do pravé krajní polohy. V tomto režimu a zapojení ukazuje první displej dobu prvního zakrytí první optické závory a druhý displej dobu druhého zakrytí první závory. Třetí a čtvrtý displej funguje obdobně pro druhou optickou závoru. Naměřené časy se nulují stiskem tlačítka **RESET**.



Obrázek 1.4: Časovač.

Zapněte ventilátor a nastavte požadovaný průtok vzduchu[3] (např. stupeň 3-4). Ověřte, že je vzduchová dráha ve vodorovné poloze (kluzáky v klidu se na ní samovolně nerozjíždějí), pokud není, nastavte ji pomocí příslušných šroubů co nejlépe do vodorovné polohy. Optické závory rozmístěte tak, aby před a po srážce měřily dobu zakrytí volně se pohybujícími kluzáky.

1.3.2 Postup měření

Dokonale pružné srážky

1. Zapojte a nastavte experiment podle postupu uvedeného v předchozím odstavci.

2. Na jeden z kluzáků připevněte nástavec s gumičkou a na druhý nástavec s planžetou pro zajištění pružné srážky. Na oba kluzáky připevněte stínítko o délce $l = 10$ cm. Na kluzák, který bude vystřelován startovacím zařízením, umístěte **symetricky** dvě závaží o hmotnosti 50 g.

3. Pomocí digitálních vah změřte hmotnosti kluzáků (m_1 a m_2).

4. Zjistěte, zda se mohou kluzáky po vzduchové dráze volně pohybovat. Nastavte startovací zařízení do **prostřední polohy**, pomocí magnetu k němu přichyťte urychlovaný kluzák. Druhý kluzák umístěte mezi optické závory a uveďte jej do klidového stavu.

5. Stisknutím tlačítka **RESET** vynulujte časovač a vystřelte kluzák. Rychlosti jednotlivých kluzáků vypočítáte jako $v_i = l/\Delta t_i$, kde Δt_i jsou doby zakrytí jednotlivých optických závor (jsou zobrazeny na jednotlivých displejích) a l jsou délky stínítek na kluzácích. Měření proveďte alespoň $5\times$.

6. Na terčový kluzák symetricky přidejte dvě závaží o hmotnostech 10 g a pokračujte v měření bodem 4.

7. Zhotovte graf, na kterém budou zachyceny teoretické průběhy hybností a jejich součet (vztahy (1.8)) spolu s naměřenými hodnotami.

8. Zhotovte graf, na kterém budou zachyceny teoretické průběhy kinetických energií a jejich součet (vztahy (1.9)) spolu s naměřenými hodnotami.

Dokonale nepružné srážky

Měření se provádí stejným způsobem jako v případě dokonale pružných srážek, pouze nástavec s gumičkou a planžetou se nahradí nástavci s jehlou a dutinou vyplněnou voskem zajišťující spojení obou kluzáků po srážce. Při delším používání jehla voskovou výplň prorazí (při srážce uslyšíte náraz). V tomto případě stačí voskovou náplň zatlačit do nástavce.

- Zhotovte graf, na kterém budou zachyceny teoretické průběhy hybností a jejich součet (vztahy (1.12)) spolu s naměřenými hodnotami.

- Zhotovte graf, na kterém budou zachyceny teoretické průběhy kinetických energií, jejich součet a deformační práci (vztahy (1.13), (1.14)) spolu s naměřenými hodnotami.

[3] Při příliš nízkém průtoku vzduchu by se kluzáky nepohybovaly na vzduchovém polštáři.

1.4 Použitá literatura

Více se o srážkách těles dočtete například v učebnici:
Jiří Bajer: Mechanika 2, *Univerzita Palackého v Olomouci*, Olomouc, 2004.

6. září 2011, Milan Červenka, *milan.cervenka@fel.cvut.cz*