

## Laboratorní úloha

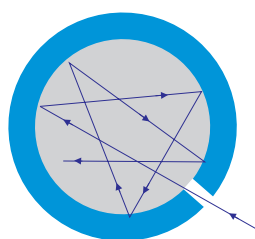
# Stefanův-Boltzmannův zákon

## 1.1 Úkol měření

Ověřte platnost Stefanova-Boltzmannova zákona měřením teplotní závislosti výkonu vyzařovaného vláknem žárovky.

## 1.2 Teoretický úvod

### 1.2.1 Absolutně černé těleso



Obrázek 1.1: Model AČT.

Z termodynamiky je známo, že existují tři způsoby přenosu tepelné energie z místa na místo: vedením (kondukcí), prouděním (konvekcí), a sáláním (radiací). První dva mechanismy ke své existenci vyžadují materiálové prostředí, přenos tepelné energie sáláním může probíhat i ve vakuu. Tepelným zářením se obecně rozumí všechno záření, které emituje povrch tělesa s nenulovou absolutní teplotou. Spektrum tohoto záření je spojitě.

Když tepelné záření dopadá na neprůhledný povrch tělesa, část je odražena zpět, a část je pohlcena. Absolutně černé těleso (AČT) je podle definice těleso, jehož povrch tepelné záření dokonale pohlcuje, a tudíž nic neodráží. Absolutně černému tělesu se blíží drsný černý povrch, dokonalejším prototypem AČT je ale spíše dutina s malým otvorem. Vlivem konečné odrazivosti vnitřních stěn se téměř každý paprsek, který do dutiny vnikne, rychle pohltí. Otvor se tedy jeví jako černý, a je dobrou aproximací AČT. I když AČT veškeré dopadající záření absorbuje, tak pokud má nenulovou (termodynamickou) teplotu, samo záření vyzařuje.

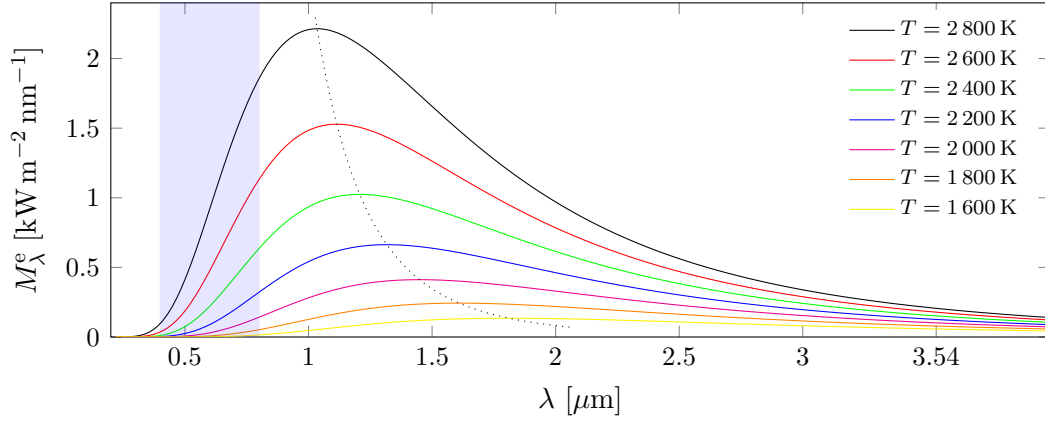
### 1.2.2 Vyzařování AČT

Roku 1859 zkoumal zákonitosti tepelného záření Gustav Robert Kirchhoff. Pomocí obecných zákonitostí termodynamiky ukázal, že čím má povrch tělesa větší pohltivost, tím lépe tepelné záření vyzařuje, takže nejlepším emitérem tepelného záření je paradoxně AČT. Ukázal rovněž, že intenzita vyzařování AČT je pouze funkcí teploty  $M^e = f(T)$ .

Spektrum záření AČT se řídí Planckovým vyzařovacím zákonem<sup>1</sup>, který můžeme vyjádřit například v následujícím tvaru

$$M_{\lambda}^e(T, \lambda)d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda k_B T} - 1)} d\lambda, \quad (1.1)$$

<sup>1</sup>Tento vzorec odvodil roku 1900 německý fyzik Max Planck a položil tím základy kvantové mechaniky.



Obrázek 1.2: Spektrum vyzařování AČT pro různé teploty. Modrý obdélník vymezuje viditelnou část spektra.

kde  $M_\lambda^e(T, \lambda)$  je tzv. spektrální intenzita vyzařování,  $\lambda$  je vlnová délka,  $T$  je termodynamická teplota (v kelvinech),  $h$  je Planckova konstanta,  $c$  je rychlost světla ve vakuu, a  $k_B$  je Boltzmannova konstanta. Výraz  $M_\lambda^e(T, \lambda)d\lambda$  vyjadřuje výkon, který AČT vyzařuje do všech směrů jedním čtverečným metrem svého povrchu v pásmu vlnových délek  $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ . Z vzorce (1.1) je patrné, že tento výkon závisí pouze na teplotě  $T$ . Spektrální intenzita vyzařování AČT pro různé teploty je zachycena na obrázku 1.2.

Celkový výkon vyzařovaný jedním čtverečným metrem povrchu AČT – intenzitu vyzařování – bychom vypočetli integrací vzorce (1.1) přes všechny vlnové délky jako

$$M^e = \int_0^\infty M_\lambda^e(T, \lambda)d\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(e^{hc/\lambda k_B T} - 1)}d\lambda = \left| \begin{array}{l} u = hc/\lambda k_B T \\ du = -hcd\lambda/\lambda^2 k_B T \\ 0 \rightarrow \infty, \infty \rightarrow 0 \end{array} \right| = \frac{2\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^\infty \frac{u du}{e^u - 1}, \quad (1.2)$$

kde

$$\int_0^\infty \frac{u du}{e^u - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

je známý tabulkový integrál, dostaneme

$$M^e = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2} T^4 = \sigma T^4, \quad (1.3)$$

kde

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2} = 5,670\,374 \dots \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

je tzv. Stefanova-Boltzmannova konstanta<sup>2</sup>. Vzorec (1.3) reprezentuje Stefanův-Boltzmannův zákon<sup>3</sup> a říká, že intenzita vyzařování AČT je úměrná čtvrté mocnině termodynamické teploty. Pro celkový výkon  $P$  vyzařovaný AČT s plochou  $S$  tedy platí

$$P = S\sigma T^4. \quad (1.4)$$

<sup>2</sup>Velikost Stefanovy-Boltzmannovy konstanty vychází z definice, její hodnota je přesná, t.j. nestanovuje se měřením.

<sup>3</sup>Tento vzorec nejprve našel experimentálně v roce 1870 rakouský fyzik Josef Stefan. O pět let později jej s využitím obecné termodynamiky a Maxwellovy teorie odvodil rakouský fyzik Ludwig Boltzmann.

Z obrázku 1.2 je patrné, že křivky spektrální intenzity vyzařování mají maximum pro vlnovou délku  $\lambda_{\max}$ , která je funkcí teploty. Najdeme ji derivováním.

Označíme-li ve vzorci (1.1)  $c_1 = 2\pi hc^2$ ,  $c_2 = hc/k_B T$ , dostaneme

$$\frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{c_1}{\lambda^5 (e^{c_2/\lambda} - 1)} \right] = -\frac{c_1}{c_2} \frac{(5\lambda/c_2 - 1)e^{c_2/\lambda} - 5\lambda/c_2}{\lambda^7 (e^{c_2/\lambda} - 1)^2}. \quad (1.5)$$

Nutnou podmínkou pro extrém je nulová derivace. Dosadíme-li  $u = c_2/\lambda$ , bude vztah (1.5) roven nule, pokud bude platit

$$5 - u = 5e^{-u}. \quad (1.6)$$

Rovnice (1.6) je transcendentní rovnice, kterou je třeba řešit numericky. Například v Maplu pomocí příkazu **fsolve** snadno zjistíme, že rovnice (1.6) má nenulové řešení  $u = u_0 = 4,965114232\dots$

Podmínku pro vlnovou délku  $\lambda_{\max}$ , na které AČT vyzařuje s maximem, dostaneme zpětným dosazením

$$u_0 = \frac{c_2}{\lambda_{\max}} = \frac{hc}{k_B T \lambda_{\max}} \Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{hc}{u_0 k_B T} = \frac{b}{T}, \quad (1.7)$$

kde

$$b = \frac{hc u_0}{k_B} = 2,897\,772 \dots \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

je tzv. Wienova konstanta<sup>4</sup>. Vzorec (1.7) představuje Wienův posunovací zákon<sup>5</sup> a říká, že vlnová délka, na níž AČT vyzařuje s maximem, je nepřímo úměrná jeho termodynamické teplotě.

### 1.2.3 Reálné zářiče

Není-li zdrojem záření AČT ale reálné těleso, probíhá vyzařování podle zákona

$$M^{re} = \int_0^\infty \epsilon(\lambda) M_\lambda^e(T, \lambda) d\lambda, \quad (1.8)$$

kde  $0 \leq \epsilon(\lambda) \leq 1$  je tzv. spektrální emisivita povrchu zdroje záření. V případě, že je spektrální emisivita vyzařování nezávislá na vlnové délce,  $\epsilon(\lambda) = \epsilon = konst.$ , hovoříme o tzv. šedém tělese. Stefanův-Boltzmannův zákon má potom tvar

$$M^{re} = \epsilon \sigma T^4, \quad (1.9)$$

a pro celkový vyzařovaný výkon platí

$$P = \epsilon S \sigma T^4. \quad (1.10)$$

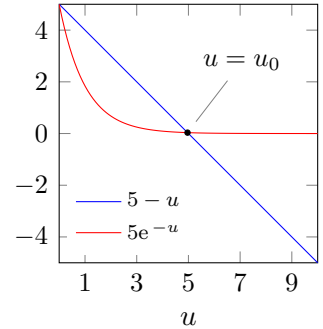
## 1.3 Experiment

### 1.3.1 Popis experimentu

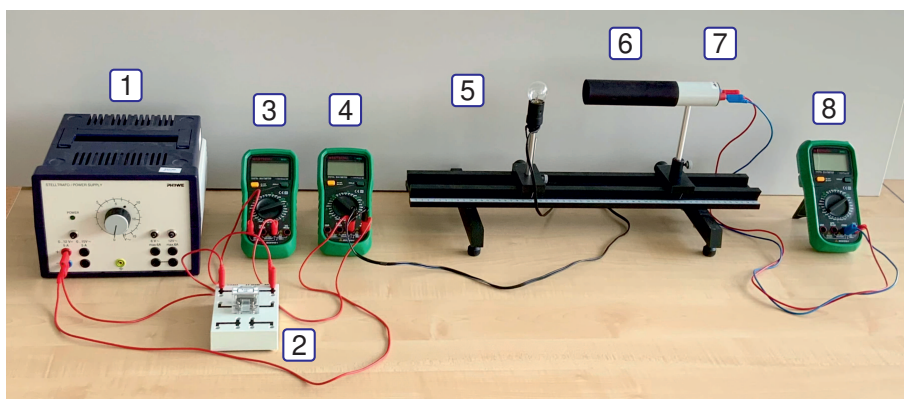
Cílem experimentu je ověřit platnost Stefanova-Boltzmannova zákona (1.3) – přesvědčit se, že vyzařovaný výkon je úměrný čtvrté mocnině jeho termodynamické teploty.

<sup>4</sup>Velikost Wienovy konstanty vychází z definice, její hodnota je přesná, t.j. nestanovuje se měřením.

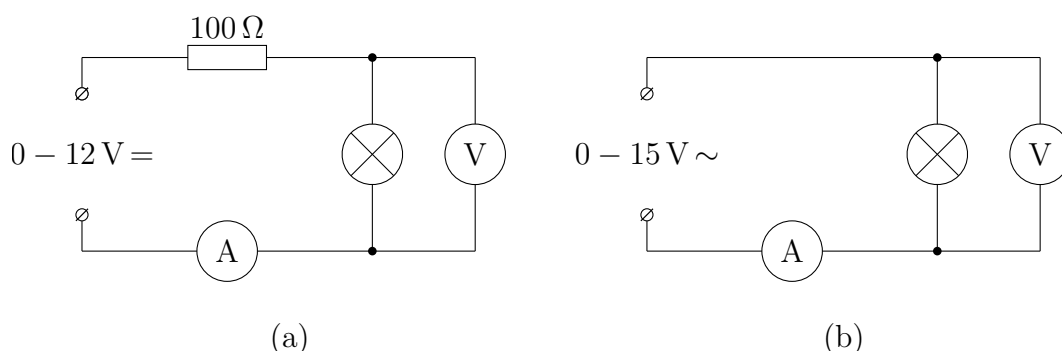
<sup>5</sup>Tento zákon teoreticky odvodil roku 1893 německý fyzik Wilhelm Wien.



Obrázek 1.3: Řešení rovnice (1.6).



Obrázek 1.4: Experimentální sestava: [1] – regulovatelný zdroj stejnosměrného a střídavého proudu, [2] – přípravek s předřadným rezistorem  $100\ \Omega$ , [3] – ampérmetr, [4] – voltmetr, [5] – žárovka, [6] – stínící kryt, [7] – termopil, [8] – milivoltmetr.



Obrázek 1.5: Schéma zapojení experimentu.

Experimentální sestava je zachycena na obrázku 1.4. Jako zdroj záření je použita nízkonapěťová žárovka s wolframovým vláknem, která zde reprezentuje šedé těleso. Žárovka je připojena ke zdroji stejnosměrného a střídavého proudu, viz obrázek 1.5, měří se proud protékající žárovkou a úbytek napětí na žárovce, takže je možné z Ohmova zákona vypočítat odpor jejího vlákna jako  $R = U/I$ .

Vláknko žárovky je vyrobeno z wolframu, u něžž je známa závislost rezistivity na teplotě. Pro odpor vlákna žárovky platí empirický vztah

$$R(t) = R_0(1 + \alpha t + \beta t^2), \quad (1.11)$$

kde  $\alpha = 4,82 \times 10^{-3}\ \text{K}^{-1}$ ,  $\beta = 6,76 \times 10^{-7}\ \text{K}^{-2}$  jsou materiálové parametry pro wolfram,  $t$  je teplota ve stupních Celsia, a  $R_0$  je odpor vlákna žárovky při teplotě  $0^\circ\ \text{C}$ . Ten se určí ze vzorce (1.11) tak, že při známé teplotě v laboratoři  $t_{\text{lab}}$  se změří odpor vlákna žárovky  $R(t_{\text{lab}})$  při malém proudu (do  $100\ \text{mA}$ ), který ještě nezpůsobuje jeho ohřívání. Odpor  $R_0$  se vypočte jako

$$R_0 = \frac{R(t_{\text{lab}})}{1 + \alpha t_{\text{lab}} + \beta t_{\text{lab}}^2}. \quad (1.12)$$

Při průchodu většího proudu se vlákno žárovky rozžhaví, a v závislosti na teplotě se jeho odpor změní na hodnotu  $R(t)$ . Při znalosti hodnot  $R_0, \alpha, \beta$  je možné teplotu vlákna vypočítat jako kladný kořen kvadratické rovnice (1.11), pro který platí

$$T = 273,15 + \frac{\alpha}{2\beta} \left[ \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\alpha^2} \left( \frac{R(t)}{R_0} - 1 \right)} - 1 \right], \quad (1.13)$$

příčemž teplota  $T$  je v kelvinech.

V experimentu je proti vláknu žárovky naměřen bezdotykový senzor teploty tzv. termopil.<sup>6</sup> Elektrické napětí  $u_t$  na jeho výstupních svorkách je úměrné výkonu elektromagnetického záření, které na něj dopadá. Jelikož tento výkon je úměrný vyzařovanému výkonu (1.10), platí

$$u_t \sim T^4. \quad (1.14)$$

Napětí  $u_t$  na svorkách termopilu se měří milivoltmetrem.

### 1.3.2 Vyhodnocení experimentu

Opakovaným měřením, pro různá napětí na žárovce, získáme sadu dvojic hodnot

$$[T_i, u_{ti}], \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

která by měla ctít funkční závislost (1.14). Naměřené hodnoty proložíme metodou nejmenších čtverců<sup>7</sup> funkcí

$$u_t = AT^a, \quad (1.15)$$

kde  $A$  je konstanta závislá na parametrech experimentální sestavy, a exponent  $a$  by měl mít hodnotu blízkou číslu 4. Jelikož metoda nejmenších čtverců v kombinaci se vztahem (1.15) vede na soustavu nelineárních rovnic, budeme postupovat takto. Rovnici (1.15) zlogaritmujeme, takže dostaneme

$$\log(u_t) = \log(AT^a) = a \log(T) + \log(A) = a \log(T) + b, \quad (1.16)$$

kde  $b = \log(A)$ , což je rovnice přímky pro logaritmy teploty a napětí. Hodnotu exponentu  $a$  tedy určíme tak, že dvojice logaritmů naměřených hodnot  $[\log(T_i), \log(u_{ti})]$  proložíme přímkou (1.16), exponent  $a$  pak odpovídá její směrnici.

### 1.3.3 Postup měření

1. Zkontrolujte, že vlákno žárovky je na měřicí lavici umístěno v ose termopilu a stínící trubice. Pokud tomu tak není, upravte příslušným způsobem výšku žárovky, případně výšku a orientaci termopilu.
2. Na teploměru odečtěte teplotu v laboratoři  $t_{\text{lab}}$ .
3. Připojte žárovku ke zdroji stejnosměrného proudu podle obrázku 1.5 (a). Předřadný rezistor o hodnotě  $100 \Omega$  umožňuje jemné nastavení malého proudu žárovkou.
4. Multimetr pro měření napětí na termopilu přepněte na stejnosměrný rozsah 200 mV. Multimetry v obvodu žárovky přepněte na stejnosměrné rozsahy. Ampérmetr připojte přes svorku **mA**.
5. Změřte napětí na žárovce pro proudy cca 25, 50, 75 a 100 mA, vypočtěte odpor vlákna žárovky  $R(t_{\text{lab}})$  a ujistěte se, že pro takto malé proudy jeho hodnota nezávisí na velikosti protékajícího proudu<sup>8</sup>.

<sup>6</sup>Z anglického *thermopile*. Jedná se o matici do série zapojených termočlánků.

<sup>7</sup>Za tímto účelem můžete použít implementaci metody nejmenších čtverců ve skriptu *Univerzální nástroj pro kreslení grafů* na webu <http://planck.fel.cvut.cz/praktikum/>.

<sup>8</sup>Pokud předtím žárovkou protékal větší proud, je třeba počkat, dokud vlákno žárovky nevychladne.

6. Odstraňte (zkratujte) předřadný rezistor  $100\ \Omega$ , obvod se žárovkou přepojte ke svorkám střídavého napětí na regulovatelném zdroji, viz obrátek 1.5(b). Multimetry zapojené do obvodu se žárovkou přepněte na střídavé rozsahy, ampérmetr připojte přes svorku **10A**, proud měřte na rozsahu  $10\ \text{A}\sim$ .
7. Pomocí regulovatelného zdroje nastavujte napětí na žárovce postupně na hodnoty  $1\ \text{V}$ ,  $1,5\ \text{V}$ ,  $2\ \text{V}$ ,  $\dots$ ,  $5,5\ \text{V}$ ,  $6\ \text{V}$ . Po nastavení napětí na žárovce počkejte alespoň 5 minut, dokud se výstupní napětí na termopilu neustálí. Odečtěte napětí na žárovce, protékající proud, a napětí na termopilu. **Napětí na žárovce by nemělo přesáhnout hodnotu 6 V.**
8. Pro jednotlivá napětí na žárovce vypočítejte odpor vlákna a jeho teplotu (viz text výše).
9. Pomocí metody nejmenších čtverců (viz text výše) vypočtěte hodnotu exponentu ve Stefanově-Boltzmannově zákonu a její nejistotu, naměřenou hodnotu porovnejte s hodnotou teoretickou.
10. Vypracujte graf závislosti  $\log(u_t)$  na  $\log(T)$ , obsahující naměřené hodnoty a teoretickou křivku (výsledek aproximace metodou nejmenších čtverců).
11. V závěru, kromě výsledku měření, odpovězte na tyto otázky: Je žárovka lineární obvodový prvek? Jaké maximální teploty dosáhlo vlákno žárovky během vašeho měření? Jaká vlnová délka maxima vyzařování odpovídá této teplotě? **Bonusová otázka:** Dokázali byste vypočítat, kolik procent energie vyzařuje žárovka, při nejvyšší vámi dosažené teplotě, ve viditelné oblasti spektra ( $400\ \text{nm} - 800\ \text{nm}$ )?

## 1.4 Použitá literatura

1. Jiří Bajec: Optika 1, vydavatelství Vladimír Chlup, 2018.
2. Raymond A. Serway, Clement J. Moses, Curt A. Moyer: Modern Physics, Thomson Learning, Inc., 2005.

12. září 2022, Milan Červenka, *milan.cervenka@fel.cvut.cz*