

Úloha 1

Stanovení teplotního součinitele odporu kovů

1.1 Úkol měření

1. Změřte teplotní součinitel odporu mědi v rozmezí teplot 20 – 80 °C.
2. Změřte teplotní součinitel odporu platiny v rozmezí teplot 20 – 80 °C.
3. Vyneste graf závislosti odporu R na teplotě t pro oba materiály.

1.2 Obecná část

1.2.1 Izolovaný atom

Abychom mohli vyložit různé vlastnosti atomů, je zapotřebí zabývat se výpočtem energetických stavů. U atomů s více elektrony je nutné při řešení úlohy rozdělení energie elektronů vzít v úvahu nejen pohyb všech elektronů v poli jádra, ale i vzájemné elektrostatické odpuzování elektronů a další elektromagnetické interakce mezi jádrem a elektrony a elektrony mezi sebou. Zanedbatelné nejsou ani relativistické efekty. Již z výše uvedeného vyplývá, že se jedná o velmi složitý problém. Ukazuje se, že tehdy, když chceme znát uspořádání elektronů do energetických stavů tak, aby celková energie atomu byla minimální, vystačíme s poměrně jednoduchým přiblížením, které se nazývá *modelem jednoelektronových stavů* či zkráceně jen *jednoelektronovým přiblížením*. V jednoelektronovém přiblížení (aproximaci) se díváme na pohyb každého elektronu atomu jako na pohyb nezávislé částice v centrálním poli, která přímo neinteraguje s ostatními elektrony. V případě, že tento problém řešíme jako nerelativistickou úlohu, použijeme k jeho řešení Schrödingerovu rovnici¹.

Energetický stav elektronu v atomu je možné charakterizovat čtyřmi kvantovými čísly n , l , m , s , kde n je *hlavní kvantové číslo* ($n = 1, 2, 3, \dots$), l je *vedlejší kvantové číslo* ($0 \leq l \leq n - 1$), m je *magnetické kvantové číslo* ($m \leq |l|$) a s je *spinové číslo* ($s = -1/2, 1/2$).

¹Schrödingerova rovnice představuje pohybovou rovnici pro mikročástice, jenž v sobě spojuje jak jejich vlnové, tak i kvantové vlastnosti. Pro kvantovou fyziku má stejný význam jako Newtonovy pohybové zákony v klasické fyzice.

Elektrony obsazují v atomu energetické stavy podle *Pauliho principu*. Podle tohoto principu může v atomu existovat jen jeden elektron v energetickém stavu, jemuž přísluší určité hodnoty čtyř kvantových čísel. V témže atomu nemohou mít dva elektrony všechna čtyři kvantová čísla stejná.

Všechny elektrony se stejným hlavním kvantovým číslem mají zhruba stejnou energii a jejich střední vzdálenost od jádra stíněného elektrony s nižšími hodnotami n je přibližně stejná. Proto se skupina elektronů, která má stejné n nazývá *slupka*. Má-li atom největší možný počet elektronů pro každou hodnotu čísla n , jsou jeho slupky uzavřeny. Elektrony v uzavřených (tj. zcela zaplněných) slupkách nazýváme *vnitřními*. Elektrony patřící neúplně zaplněným slupkám označujeme jako *valenční elektrony*. Valenční elektrony zprostředkovávají vazbu jednotlivých atomů v krystalu pevné látky. V dané slupce roste obecně energie elektronu s rostoucí l , současně s tím se zvětšuje jeho střední vzdálenost od jádra a elektronů s nižšími n a pochopitelně klesá jeho vazbová energie.

Hodnoty kvantového čísla l jsou označovány podle původních názvů pro spektrální série písmeny s (sharp), p (principal), d (diffuse), f (fundamental) atd. Elektrony se stejným l při daném n tvoří tzv. *podslupku*.

Hodnoty, kterých mohou kvantová čísla nabývat, jsou známy. Podle nich je sestavena tab. 1.1, která poskytuje údaje o konfiguraci a počtu elektronů v základním (tj. nevzbuzeném, neexcitovaném) stavu atomu.

Pro zařazení elektronu do podslupky se používá notace nl^i , kde index i označuje počet

Slupka	n	$l=$	0	1	2	3	Maximální počet elektronů
		dráha	s	p	d	f	
K	1		2				2
L	2		2	6			8
M	3		2	6	10		18
N	4		2	6	10	14	32

Tabulka 1.1: Dovolené obsazení prvních čtyř elektronových slupek

elektronů v podslupce, tj. počet obsazených stavů. Největší počet elektronů ve slupce N_n je dán vztahem $N_n = 2n^2$. Pro podslupku je počet elektronů N_l je určen vztahem $N_l = 2(2l + 1)$.

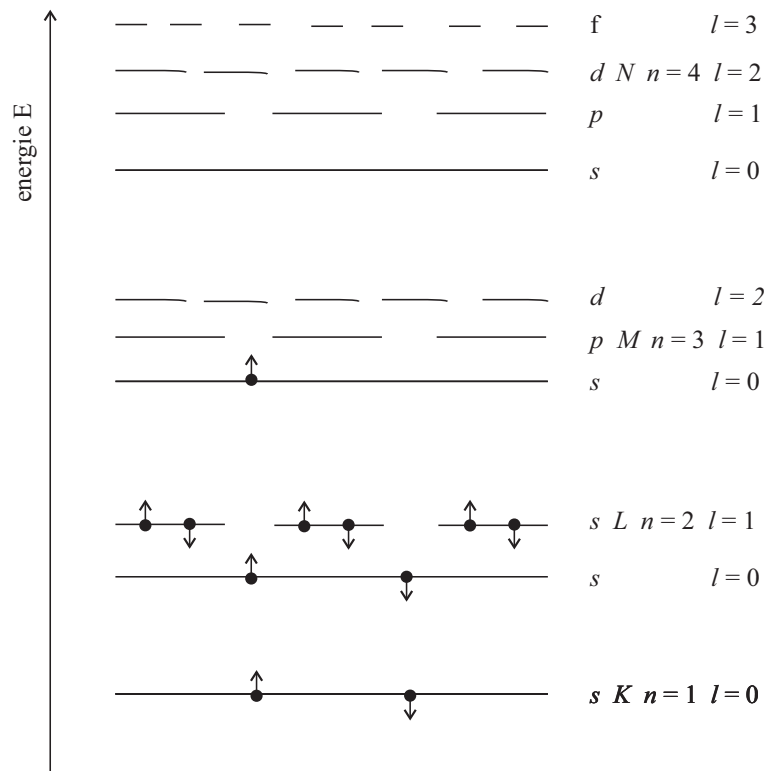
Energetické poměry² v atomu sodíku jsou schematicky naznačeny na obr. 1.1. V atomu, který je v základním (neexcitovaném) stavu, zaplňují elektrony postupně hladiny od *nejnižší energie* a přitom splňují Pauliho princip. Soustava elektronů, která zaplnila tímto způsobem určité hladiny, se nazývá *elektronová konfigurace* daného prvku.

1.2.2 Pevná látka a teorie energetických pásů

Omezíme se na jednu významnou třídu pevných látek, a to na *krystaly*. Krystaly se vyznačují tím, že to jsou objekty s periodickým uspořádáním základních složek, z nichž jsou vytvořeny, do prostorové mříže.

Při seskupování původně izolovaných atomů dochází k rozštěpení diskrétních energetických hladin elektronů v pás hladin. Sbližuje-li se totiž k sobě N atomů, pak vzájemným

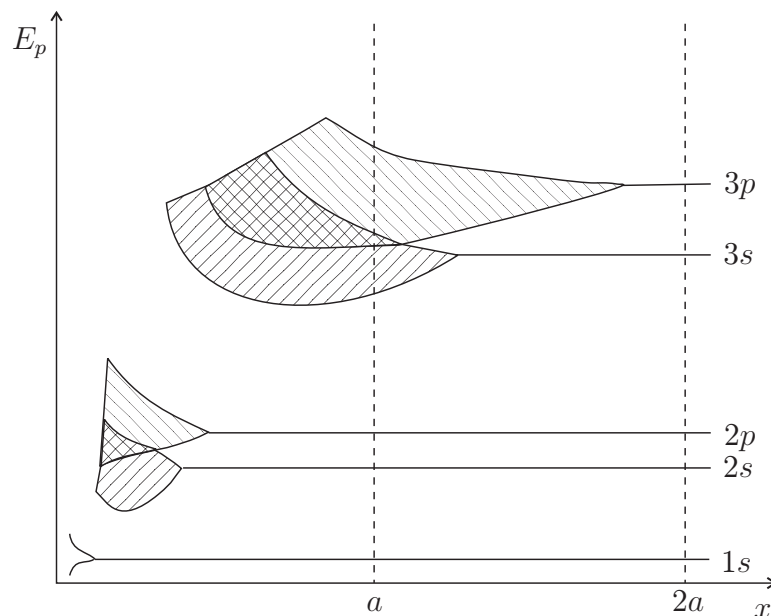
²Energetické rozdíly mezi energetickými hladinami ve slupce jsou ovšem ve skutečnosti mnohem menší, než jak je na obrázku 1.1 mezi hladinami naznačeno.



Obrázek 1.1: Spektrum energetických hladin elektronů v atomu, v němž je uvedeno rozdělení elektronů v atomu sodíku.

působením elektrických polí vznikne z každého kvantového stavu elektronu osamocenému atomu pás energií s celkovým počtem N hladin. Místo systému diskretních hladin, charakteristického pro izolovaný atom, dostáváme při přechodu k pevné látce systém energetických pásů, z nichž každý představuje energetickou hladinu atomu rozštěpenou na N vzájemně velmi blízkých hladin; u reálné pevné látky je mezi nimi energetický rozdíl asi 10^{-22} eV. Vzhledem k těmto malým energetickým rozdílům mezi sousedními hladinami jednoho pásu pokládáme energetické spektrum pásu, jehož energetická šířka je řádově 1 eV, za spojité. Ovšem v tomto kvazikontinuálním pásu energií je pouze N hladin. Tyto úvahy o rozšíření (rozštěpení) diskretní energetické kvantové hladiny se týkají všech kvantových stavů. Šířka pásů (šířkou vždy rozumíme energetický rozsah, nikoliv geometrický rozměr) je větší pro energetické pásy odpovídající vyšším kvantovým stavům, na obr. 1.2 jsou zachyceny energetické poměry u krystalu sodíku. Z obrázku je patrné, že může dojít i k překrytí některých energetických pásů. Z obr. 1.2 je vidět, jak závisí tvorba pásů na meziatomové vzdálenosti. Mezi energetickými pásy, které vznikly rozšířením diskretních hladin, se nacházejí tzv. *zakázané pásy*, do kterých spadají hodnoty energie, jež elektrony nemohou nabývat. Pro vysvětlení mechanismu elektrické vodivosti má zásadní význam tzv. *valenční pás*, který vznikne rozšířením těch diskretních energetických hladin, které zaujímají v izolovaném atomu valenční elektrony. Nad valenčním pásem se nachází prázdný energetický pás.

Přiblížíme-li k sobě atomy na konstantní vzdálenost a tak, aby všechny ležely na jedné přímce, vznikne ideální atomový systém, nazývaný *lineární mřížka*. Průběh potenciální energie v této mřížce je na obr. 1.3. Podobný průběh by měla potenciální energie i v prostorové pravidelné mřížce ve směru, který prochází uzlovými body mřížky. Snadno si



Obrázek 1.2: Rozšiřování energetických hladin do pásů u sodíku.

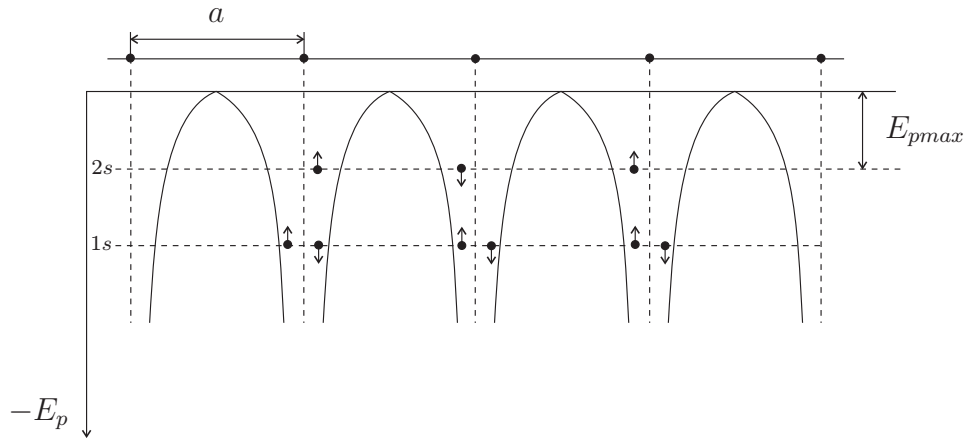
představíme, že ve směru, který neprochází uzlovými polohami mřížky, kolísá potenciální energie méně. Mimouzlový prostor tvoří ovšem podstatnou část prostoru zaujímaného mřížkou. Elektron se může v krystalu pevné látky pohybovat od atomu k atomu, přesahuje-li jeho úhrnná energie výšku potenciálové bariéry nebo s jistou pravděpodobností může procházet přímo energetickou bariérou, což nazýváme *tunelovým jevem*³.

Elektrické vodiče jsou látky, u nichž spektrum energetických stavů vždy obsahuje částečně nezaplněný pás. K hladinám obsazených elektrony se přimykají volné nezaplněné hladiny. Vnější elektrickým polem jsou umožněny přechody na vyšší hladiny a tím i nesymetrické rozdělení vektorů rychlostí elektronů. Vzniká elektrický proud jako výsledek uspořádaného pohybu elektronů.

Vycházíme-li z Pauliho principu, pak pevné látky, skládající se z atomů se sudým počtem elektronů, mají obvykle pásy se zcela zaplněnými nebo prázdnými hladinami a pevné látky, vytvořené z atomů s lichým počtem elektronů mají alespoň jednu hladinu pásu zaplněnou na polovinu. Nachází-li se pevná látka v elektrickém poli, pak elektrony přecházejí do vyšších volných energetických hladin. Možnost tohoto procesu, tj. výměny energie mezi elektrickým polem a elektrony, je podmíněna právě volnými hladinami v pásu. Elektrony tedy mohou být urychleny a tak zprostředkovat přenos elektrického proudu. Proto kovy s dobrou elektrickou vodivostí jsou tvořeny z atomů s lichým počtem elektronů, viz obr. 1.4c). Výjimkou uvedeného pravidla jsou některé prvky, které jsou vodiči elektrického proudu, i když se skládají z atomů obsahující sudý počet elektronů. U těchto prvků se překrývá zaplněný valenční pás s nejbližším prázdným pásem, čímž vzniká částečně zaplněný energetický pás umožňující vedení elektrického proudu, viz obr. 1.4a).

Pevné látky, u nichž nemůžeme vlivem vnějšího elektrického pole dojít k asymetrickému rozdělení vektorů rychlostí elektronů nazýváme *izolanty (dielektrika)*. U izolantů tedy je valenční pás zcela zaplněn a mezi dalším prázdným pásem je poměrně široký zakázaný pás, kterého by mohly valenční elektrony dosáhnout pouze v případě velmi vysokého vněj-

³Aby částice překonala potenciálovou bariéru, nevystupuje nad její vrchol, ale prochází pod ním jakoby tunelem.



Obrázek 1.3: Lineární mřížka lithia v základním stavu ($1s^2, 2s^1$), v níž je naznačena energetická poloha elektronů. Valenční elektrony ve stavu $2s$ jsou při pohybu omezeny potenciálovou bariérou výšky E_{pmax} .

šího elektrického pole, viz obr. 1.4b).

Z teorie energetických pásů vyplývá, že v případě obsazení energetických hladin v blízkosti dna příslušného pásu se elektrony chovají jako volné částice ve vakuu s efektivní hmotností m^* (viz [1], [2]), která se liší od klidové hmotnosti volného elektronu. Jinými slovy, přidělením efektivní hmotnosti m^* elektronům můžeme na elektrony pohlížet jako na volné nosiče náboje, jenž nejsou vázány pouze k jednomu atomu mřížky. Podrobnější informace ohledně efektivní hmotnosti elektronů jsou uvedeny v obecné části úlohy 1.

1.2.3 Elektronová vodivost kovů

Elektrický proud je dán mikroskopickým pohybem částic látky nesoucích elementární náboje, jejichž pohyb je usměrněn elektrickými silami. Tyto proudy se nazývají kondukční či vodivé. U kovů jsou těmito nositeli téměř výhradně elektrony.

Každému stavu elektronu v energetickém pásu přísluší určitá rychlost \mathbf{v}_i . Bez působení vnějšího pole musí platit rovnice

$$\sum_i \mathbf{v}_i = 0, \quad (1.1)$$

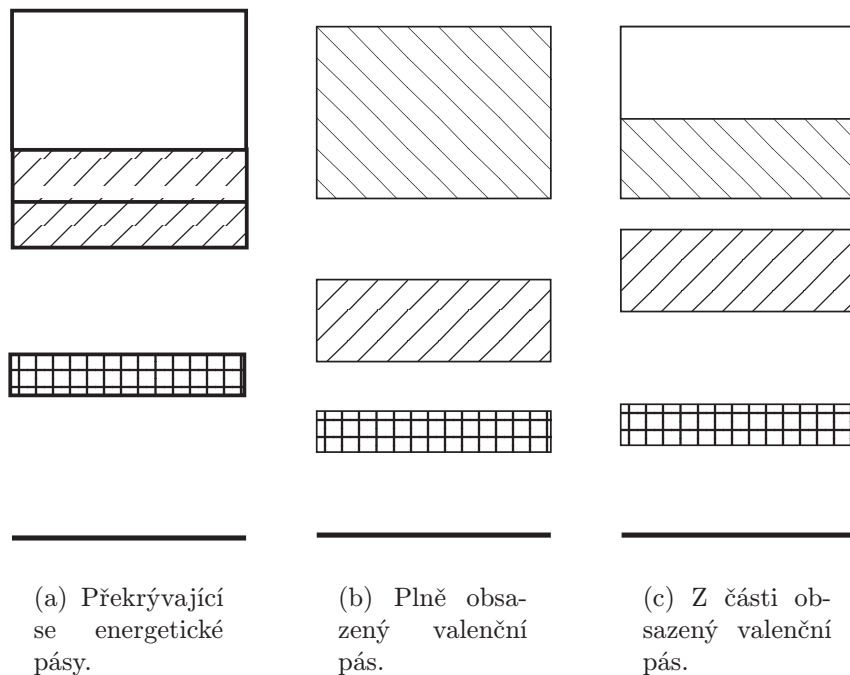
protože v opačném případě by tekla elektrický proud také bez vnějšího pole⁴. Na každý elektron ve vnějším elektrickém poli působí síla $\mathbf{F}_i = -e\mathbf{E}$, kde \mathbf{E} je intenzita elektrického pole. Podle Newtonova zákona můžeme napsat následující rovnici

$$m_i^* \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = -e\mathbf{E}. \quad (1.2)$$

V případě, že všechny nosiče náboje mají stejnou efektivní hmotnost, pak pro jednotkový objem krystalu platí vztah

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n_v} \mathbf{p}_i = \left[\frac{d\Delta\mathbf{P}}{dt} \right]_E = -en_v \mathbf{E}, \quad (1.3)$$

⁴Je však zřejmé, že rovnice (1.1) bude platit i v případě přítomnosti vnějšího pole, jakmile bude energetický pás plně obsazen



Obrázek 1.4: Energetické pásy

kde indexem E je zdůrazněno, že se jedná o změnu hybnosti zapříčiněnou vnějším elektrickým polem, $\Delta\mathbf{P}$ značí celkovou změnu hybnosti⁵ a n_v představuje celkový počet elektronů podílejících se na přenosu náboje v objemové jednotce krystalu. Jestliže na změně celkové hybnosti se podílelo jen vnější elektrické pole \mathbf{E} , pak integrací vztahu (1.3) dostaneme vztah

$$\Delta\mathbf{P} = -en_v\mathbf{E}t, \quad (1.4)$$

ze kterého vyplývá, že hybnost, a proto i proudová hustota, trvale roste úměrně s časem. Avšak ve skutečném krystalu se při svém pohybu nosič náboje setkává s kmitajícími atomy mřížky, čímž dochází ke srážkám s těmito atomy. Při těchto srážkách ztrácí urychlený nosič náboje (elektron) získanou energii a v prvním přiblížení se vrací do stavu tepelné rovnováhy. Můžeme též předpokládat, že rychlost, s jakou se hybnost $\Delta\mathbf{P}$ získaná v elektrickém poli mění v důsledku srážek směrem k svojí rovnovážné hodnotě (tj. k nule), je

$$\left[\frac{d\Delta\mathbf{P}}{dt} \right]_z = -K\Delta\mathbf{P}. \quad (1.5)$$

Smysl konstanty K najdeme integrací této rovnice. Za předpokladu, že v čase $t = 0$ se hybnost rovnala $\Delta\mathbf{P}_0$ můžeme řešení rovnice (1.5) napsat v následujícím tvaru

$$\Delta\mathbf{P} = \Delta\mathbf{P}_0 \exp(-Kt) = \Delta\mathbf{P}_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (1.6)$$

přičemž $\tau = 1/K$. Nová konstanta τ , jenž má rozměr času a označuje čas, za který původní hodnota celkové hybnosti klesla e – krát, se nazývá *relaxační konstanta*. Ustálený stav

⁵Připomeňme, že celková hybnost před působením vnějšího elektrického pole je nulová, viz vztah (1.1).

nastane tehdy, když se uvedené změny vzájemně vykompenzují, tj. platí rovnice

$$\left[\frac{d\Delta\mathbf{P}}{dt} \right]_E + \left[\frac{d\Delta\mathbf{P}}{dt} \right]_z = -en_v\mathbf{E} - \frac{\Delta\mathbf{P}}{\tau} = 0. \quad (1.7)$$

Ze vztahu (1.7) vyplývá, střední hodnota hybnosti ve vnějším elektrickém poli je $\Delta\mathbf{P}_s = -en_v\tau\mathbf{E}$ a střední rychlost každého elektronu je

$$\mathbf{v}_s = -\frac{\Delta\mathbf{P}_s}{n_v m^*} = -\frac{e\tau}{m^*}\mathbf{E}. \quad (1.8)$$

Střední volná dráha nosiče náboje l_s je pak dána vztahem: $l_s = v_s\tau$. Hustota proudu \mathbf{j} v daném místě je dána následujícím vztahem

$$\mathbf{j} = -en_v\mathbf{v}_s. \quad (1.9)$$

Dosadíme-li do rovnice (1.9) ze vztahu (1.8) dostaneme, že

$$\mathbf{j} = \frac{n_v e^2 \tau}{m^*} \mathbf{E} = \gamma \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E}, \quad (1.10)$$

kde $\gamma = n_v e^2 \tau / m^*$ je tzv. *měrná vodivost* či *konduktivita* látky a $\rho = m^* / n_v e^2 \tau$ je *měrný odpor* či *rezistivita* látky. Připomeňme, že výraz (1.10) představuje *Ohmův zákon* v diferenciálním tvaru, tj. Ohmův zákon vztahující se ke konkrétnímu bodu prostoru. V případě homogenního vodiče ve tvaru válce (drát) konstantního průřezu S a ustálené hustoty proudu \mathbf{j} , je možné hustotu proudu vyjádřit jako

$$j = \frac{I}{S}, \quad (1.11)$$

kde I je ustálený stejnosměrný proud průřezem S vodiče. Dosazením vztahu (1.11) do rovnice (1.10) a následným vynásobením obou stran rovnice délkou vodiče l po úpravě dostaneme

$$I = \gamma \frac{S}{l} El = \gamma \frac{S}{l} U = GU = \frac{U}{R}, \quad (1.12)$$

kde $U = El$ je napětí na vodiči, G je elektrická vodivost (konduktance) a R je elektrický odpor (rezistance). Vztah (1.12) je vyjádřením Ohmova zákona v integrálním tvaru.

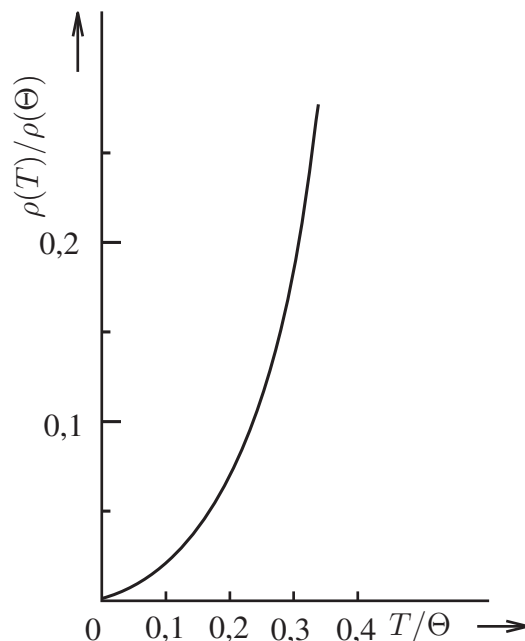
V případě, že uvažovaný kovový krystal bude obsahovat nečistoty a defekty (vakance, intersticiální atomy, dislokace), které představují pro pohybující se nosič elektrického náboje další překážky, projeví se to zkrácením doby relaxace τ . Pak pro celkovou dobu relaxace dostáváme

$$\tau = \left(\frac{1}{\tau_m} + \frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_d} \right)^{-1},$$

kde τ_m , τ_n a τ_d jsou doby relaxace odrážející vliv kmitání atomů mřížky, nečistot a defektů v daném krystalu. Takže rezistivitu krystalu je možné vyjádřit jako

$$\rho(T) = \rho_m(T) + \rho_n + \rho_d.$$

Celková rezistivita je závislá na teplotě T vlivem skutečnosti, že s rostoucí teplotou stoupá počet srážek elektronů s kmitajícími atomy mřížky, které kmitají kolem svých středních poloh. Přičemž závislost měrného odporu na teplotě je nelineární. Na obrázku 1.5 je graf



Obrázek 1.5: Závislost měrného odporu na teplotě (graf zachycuje funkční závislost v oboru nízkých teplot).

Látka	Au	Ag	Al	Pt	Cu	Fe	Ni
Θ [K]	185	220	380	225	310	400	390

Tabulka 1.2: Debyova teplota pro vybrané látky.

zachycující teplotní závislost rezistivity některých kovů (mědi, hliníku, zlata, niklu atd.), přičemž jejich hodnoty jsou vztaženy k jejich měrnému odporu při tzv. *Debyově teplotě* Θ (viz úloha 1). V tabulce 1.2 jsou uvedeny Debyovy teploty některých kovů. Z obr.1.5 je zřejmé, že pro nízké teploty vykazuje měrný odpor kovů na teplotě nelineární závislost. Z grafu je dále patrné, že pro teploty $T/\Theta > 0,3$ počíná mít uvedený graf téměř lineární průběh, který zůstává i pro teploty vyšší, jenž nejsou do tohoto grafu zahrnuty, aby bylo možné zachytit ve vhodném měřítku zmiňovanou nelineární závislost pro nízké teploty. Pro oblast lineární závislosti můžeme závislost měrného odporu, resp. elektrického odporu, na teplotě vyjádřit následujícím způsobem

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t) \quad [\Omega \text{ m}] , \quad (1.13)$$

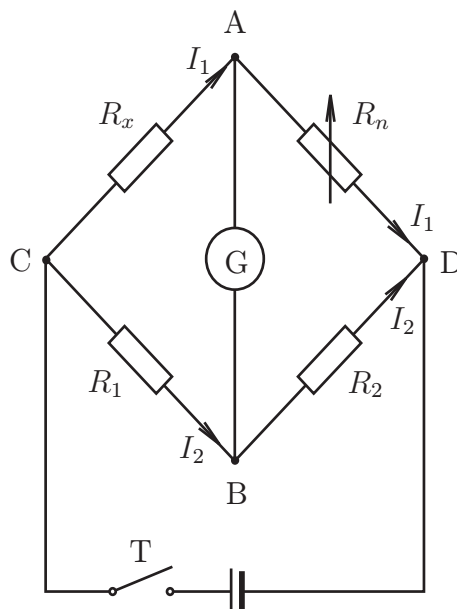
resp.

$$R = R_0(1 + \alpha t) , \quad (1.14)$$

kde ρ_0 je měrný odpor při teplotě 0°C , R_0 je elektrický odpor při teplotě 0°C , α je teplotní součinitel odporu. V tabulce 1.3 jsou uvedeny hodnoty měrného odporu (pro teplotu $T = 273 \text{ K}$) spolu s příslušnými teplotními součiniteli pro několik vybraných kovů.

Látka	$\rho [10^{-8}\Omega\text{m}]$	$\alpha[10^{-3}\text{K}^{-1}]$
Al	2,45	4,5
Ag	1,505	4,10
Cu	1,555	4,33
Pt	9,81	3,92
Ni	6,14	6,8
Au	2,04	3,98

Tabulka 1.3: Měrný odpor a teplotní součinitel odporu pro vybrané látky.



Obrázek 1.6: Schéma měřícího zapojení.

1.3 Postup měření

1. Zapojíme přístroje podle schématu na obr.1.6. Měření odporu provádíme na měřícím Wheatstoneově můstku MLG-Metra (viz C).
2. Do kádinky dáme asi 650 g vody, vložíme míchadélko a měřený odpor.
3. Kádinku postavíme na topnou desku míchačky a vložíme teploměr tak, aby spodní část teploměru byla asi 50 mm nad dnem kádinky. Připojíme míchačku k elektrické síti.
4. Zapneme spínač míchačky a ovládacím prvkem nastavíme asi 300 ot/min.
5. Asi po pěti minutách zapneme spínač topení míchačky a měříme odpor vzorku zhruba po 2 °C v teplotním rozmezí 20 až 80 °C. Vzhledem k tomu, že naměřené hodnoty zpracováváme pomocí metody nejmenších čtverců, tak není nutné, abychom měřili odpor vzorku v závislosti na teplotě ekvidistantně. Proto měříme odpor přibližně po 2 °C neboli vyvážíme můstek a teprve v ten okamžik odečteme příslušnou

teplotu. Jinak je nutné průběžně vyvažovat můstek, abychom vždy k odečítané teplotě mohli odečíst i příslušný odpor vzorku.

6. Naměřené hodnoty zpracujte pomocí metody nejmenších čtverců (viz kapitola 1.6.5) a chybu vypočtete podle příslušného vzorce uvedeného tamtéž.

1.4 Kontrolní otázky

1. Jaká je nutná podmínka k tomu, aby daná pevná látka vykazovala dobrou elektrickou vodivost?
2. Jak se projeví nečistoty a defekty krystalu na jeho vodivosti?
3. Jaká je obecně závislost měrného odporu kovů na teplotě?

1.5 Literatura

- [1] Blatt, F. J.: Modern physics, McGRAW-HILL, INC., New York, 1992.
- [2] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.: Fyzika, VUTIUM-PROMETHEUS, Brno, 2000.
- [3] Krempaský, J.: Fyzika, ALFA, Bratislava, 1988.
- [4] Krupka, F., Kalivoda, L.: Fyzika, SNTL, Praha, 1989.
- [5] Horák, Z.: Praktická fyzika, SNTL, Praha, 1958.
- [6] Štoll, I.: Fyzika pro gymnázia - Fyzika mikrosvěta, Galaxie, Praha, 1993.
- [7] Brož, J., Roskovec, V., Valouch, M.: Fyzikální a matematické tabulky, SNTL, Praha, 1980.