Laboratorní úloha

Určení modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou a stanovení momentu setrvačnosti

1.1 Úkol měření

1. Změřte modul pružnosti ve smyku ocelové struny.
2. Určete moment setrvačnosti rotoru elektromotoru metodou torzních kmitů.

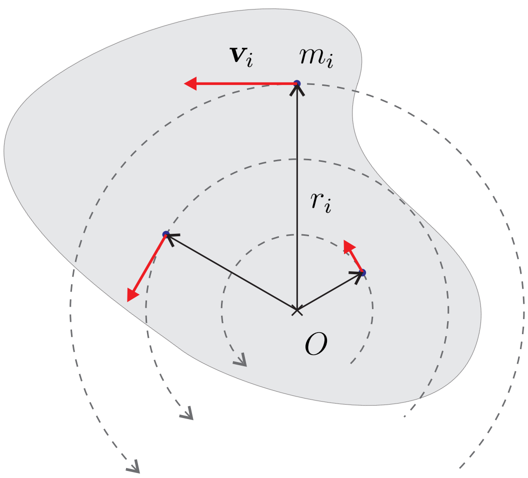
1.2 Teoretický úvod

1.2.1 Moment setrvačnosti

Mějme tuhé těleso, které je otáčivě upevněno vzhledem nehybné ose O, viz obrázek 1.1. Takovéto těleso může vykonávat pouze otáčivý pohyb kolem osy O a jeho poloha je tak zcela popsána pomocí úhlu otočení. Představme si, že těleso je tvořeno celkem N hmotnými body o hmotnostech m_i, kde $i = 1, \ldots, N$. Pro celkovou kinetickou energii tělesa bude platit

$$E_\mathrm{k} = \sum_{i=1}^{N} E_{\mathrm{k}i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2, \tag{1.1}$$

kde v_i je velikost rychlosti i-tého hmotného bodu. Jelikož předpokládáme, že těleso je tuhé, jednotlivé hmotné body, které jej tvoří, vůči sobě nemění svoji polohu. Otáčí-li se tuhé těleso úhlovou rychlostí ω, jeho jednotlivé body se pohybují po kruhových trajektoriích a pro jejich obvodové rychlosti platí



Obrázek 1.1: K momentu setrvačnosti.

$$v_i = \omega r_i, \tag{1.2}$$

kde r_i je vzdálenost daného bodu od osy rotace O. Dosazením vztahu (1.2) do (1.1) pro celkovou (rotační) kinetickou energii tuhého tělesa dostaneme vztah

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2, \tag{1.3}$$

kde veličina

$$J = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2, \tag{1.4}$$

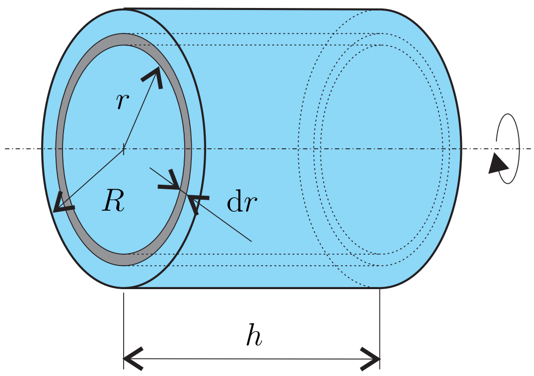
závisí pouze na rozložení hmoty v tělese vzhledem k dané ose otáčení a nezávisí na úhlové rychlosti otáčení tělesa. Nazýváme ji *moment setrvačnosti* vzhledem k dané ose. Pro různé osy otáčení má dané těleso obecně různé momenty setrvačnosti.

Moment setrvačnosti hraje klíčovou úlohu v dynamice rotačních pohybů a vyjadřuje míru setrvačnosti tělesa v rotačním pohybu, stejně jako (setrvačná) hmotnost tělesa v pohybu translačním. Pro praktické výpočty momentu setrvačnosti tělesa se spojitě rozloženou hmotou můžeme ve vztahu (1.4) jednotlivé hmotné body nahradit hmotnostmi elementárních objemů $m_i \to \mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V$, kde ρ je hustota tělesa v daném bodě, sumu nahradit objemovým integrálem a psát

$$J = \int_V \rho r^2 \mathrm{d}V, \tag{1.5}$$

kde r symbolizuje vzdálenost elementu $\mathrm{d}V$ od osy rotace.

Příklad: moment setrvačnosti válce



Obrázek 1.2: K výpočtu momentu setrvačnosti válce.

Výpočet momentu setrvačnosti ilustrujeme na příkladu homogenního válce o poloměru R a výšce h pro osu rotace totožnou s geometrickou osou válce, viz obrázek 1.2.

Abychom se vyhnuli výpočtu vícenásobného (trojného) integrálu, vyjádříme objemový element $\mathrm{d}V$ pomocí proměnné, jejíž funkcí je integrovaný výraz, zde proměnné r (hustota je v případě homogenního tělesa konstantní a lze ji vytknout před integrál). Geometricky se jedná o válcovou slupku o výšce h, poloměru r a tloušťce stěny $\mathrm{d}r$, viz obrázek 1.2. Objem tohoto elementu najdeme buď jako diferenciál objemu válce

$$V = \pi r^2 h \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}V = 2\pi h r \mathrm{d}r,$$

anebo „narovnáním“ na tenký kvádr o stranách $h, 2\pi r, \mathrm{d}r$.

Integrací přes celý objem dostaneme

$$J = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 \,\mathrm{d}r = \frac{\pi\rho h R^4}{2}.$$

Vyjádříme-li hustotu jako

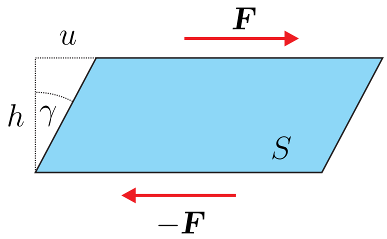
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi r^2 h},$$

dostaneme pro moment setrvačnosti výraz

$$J = \frac{1}{2} m R^2. \tag{1.6}$$

1.2.2 Pružnost ve smyku

Mějme hranol o podstavách s plochami S a výšce h. Působí-li na horní i spodní stěnu opačně orientované tečné síly velikosti F, dojde k namáhání smykem a deformaci hranolu. Boční stěny se zešikmí o úhel smyku $\gamma \approx \tan\gamma = u/h$, viz obrázek 1.3.



Obrázek 1.3: Namáhání smykem.

Pro velikost tečného napětí τ platí

$$\tau = \frac{F}{S}.$$

Bude-li výška hranolu h dostatečně malá, můžeme zanedbat jeho ohyb a pro úhel smyku γ bude platit *Hookův zákon*[1]

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \tag{1.7}$$

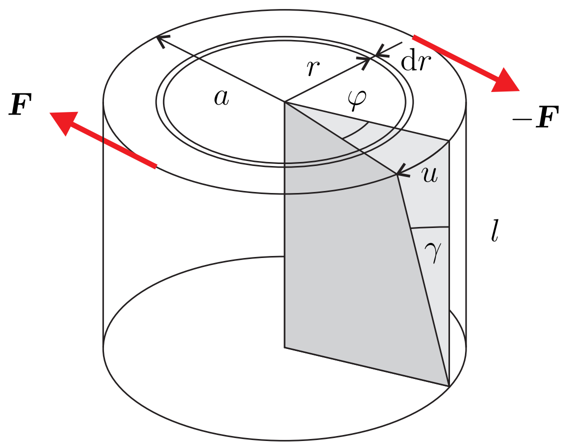
kde konstanta úměrnosti G se nazývá *modul pružnosti ve smyku* a jedná se o materiálovou konstantu, jejíž hodnotu pro daný materiál najdeme v tabulkách, viz například tabulka 1.1 na straně 6.

1.2.3 Pružnost v torzi

Pružnost ve smyku se projevuje mimo jiné při namáhání těles krutem, neboli torzí. Uvažujme tyč (drát) kruhového průřezu délky l a poloměru a, kterou podrobíme namáhání v krutu momentem dvojice sil o velikosti M, viz obrázek 1.4. Objem tyče můžeme rozdělit na elementární válcové slupky výšky l, poloměru r a tloušťky dr. Jednotlivé slupky jsou namáhány tečným napětím τ a dochází u nich ke smyku $\gamma = \tau/G$ podle Hookova zákona. Úhel pootočení φ je v celém průřezu stejný, a proto platí $u = r\varphi = l\gamma$. Dosazením do Hookova zákona tak dostaneme

$$\tau = G\frac{r\varphi}{l},$$

což znamená, že tečné napětí narůstá lineárně se vzdáleností r od středu tyče. Na elementární mezikruží (horní podstavu válcové slupky) o ploše $\mathrm{d}S = 2\pi r \mathrm{d}r$ působí elementární moment



Obrázek 1.4: Namáhání torzí.

$$\mathrm{d}M = r\mathrm{d}F = r\tau\mathrm{d}S = 2\pi G\frac{r^3\varphi}{l}\mathrm{d}r$$

a na celou podstavu pak celkový moment

$$M = 2\pi G\frac{\varphi}{l}\int_0^a r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi a^4 G}{2l}\varphi = k_\mathrm{T}\varphi, \tag{1.8}$$

kde $k_\mathrm{T} = \pi a^4 G/2l$ nazýváme torzní tuhostí[2] tyče (drátu).

1.2.4 Torzní kyvadlo

Na strunu délky l a průměru d zavěsíme těleso (setrvačník) o známém momentu setrvačnosti J vzhledem k ose závěsu, strunu zkroutíme o úhel φ_0 a uvolníme. Těleso na struně začne vykonávat *torzní kmity* – sestrojili jsme tzv. *torzní kyvadlo.*

[1] Tento empirický zákon rovněž platí pouze za předpokladu, že tečné napětí nenabývá příliš vysokých hodnot.

[2] Všimněte si silné závislosti torzní tuhosti na poloměru, která se využívá u citlivých torzních vah s velice tenkými vlákny umožňujícími dosahovat měřitelná pootočení i při velmi malých točivých momentech. Torzní váhy použil např. Coulomb pro určení síly působící mezi náboji a Cavendish pro určení gravitační konstanty.

Abychom strunu pootočili o úhel φ, musíme na ni působit momentem dvojice sil $M = k_\mathrm{T}\varphi$, viz vztah (1.8). Reakcí na moment M je podle zákona akce a reakce moment $M' = -M = -k_\mathrm{T}\varphi$, který se snaží vrátit strunu do původního stavu, takže pro těleso zavěšené na struně můžeme psát pohybovou rovnici

$$J\ddot{\varphi} = M' \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \tag{1.9}$$

kde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_\mathrm{T}}{J}} = \sqrt{\frac{\pi d^4 G}{32 l J}} \tag{1.10}$$

je kruhový kmitočet torzních kmitů, neboť v rovnici (1.9) poznáváme rovnici harmonických kmitů. Pro dobu kyvu[3] torzního kyvadla T_k tedy platí

$$T_\mathrm{k} = \frac{\pi}{\omega_0} = \sqrt{\frac{32\pi l J}{d^4 G}}. \tag{1.11}$$

Vztah (1.11) lze použít k určení momentu setrvačnosti zavěšeného tělesa (známe-li modul pružnosti ve smyku materiálu struny), případně, známe-li moment setrvačnosti zavěšeného tělesa, můžeme vztah (1.11) přepsat do tvaru

$$G = \frac{32\pi l J}{d^4 T_\mathrm{k}^2} \tag{1.12}$$

vhodného pro výpočet modulu pružnosti ve smyku materiálu struny.

1.3 Postup měření

1.3.1 Stanovení modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou

1. Změřte délku struny ocelovým měřítkem.

2. Změřte průměr struny mikrometrem nejméně 10×.

3. Změřte průměr válcové desky sloužící jako setrvačník posuvným měřítkem, její hmotnost je na ní udaná a vypočítejte její moment setrvačnosti pomocí vztahu (1.6).

4. Zavěste kruhovou desku na strunu. Desku pootočte o úhel $60° - 90°$, desku uvolněte a začněte měřit dobu torzních kyvů T_k.

5. Dobu torzních kyvů měřte s použitím omezovací metody (viz dodatek 1.4).

6. Určete standardní nejistotu doby kyvu $u(T_\mathrm{k})$. Dosaďte dobu jednoho kyvu T_k do vzorce (1.12) a vypočítejte modul pružnosti ve smyku materiálu struny G.

7. Vypočítejte kombinovanou standardní nejistotu modulu pružnosti ve smyku materiálu struny.

1.3.2 Měření momentu setrvačnosti rotoru elektromotoru vzhledem k ose symetrie

1. Na strunu, jejíž parametry znáte z předcházejících měření, zavěste těleso, jehož moment setrvačnosti chcete změřit.

[3] Pro připomenutí, jeden *kmit* se sestává ze dvou *kyvů*.

2. Nechte soustavu konat torzní kmity a omezovací metodou (viz dodatek 1.4) stanovte dobu kyvu soustavy T_k.

3. Získanou dobu kyvu T_k dosaďte do vzorce (1.12) a vypočítejte moment setrvačnosti J zkoumaného tělesa.

4. Vypočítejte kombinovanou standardní nejistotu momentu setrvačnosti zkoumaného tělesa.

1.4 Dodatek – Omezovací metoda

Tato metoda je vhodná pro měření periodicky se opakujících dějů, zejména tehdy, je-li perioda opakování velká. Její hlavní výhodou je, že lze dosáhnout teoreticky libovolné přesnosti, aniž bychom pracně počítali počet period. Stačí k tomu znát pouze hodnotu *krajní (maximální) chyby*, které se můžeme dopustit při měření základní periody nebo alespoň její bezpečnou horní mez. Celou metodu si předvedeme na příkladu měření doby kyvu torzního kyvadla:

Torzní kyvadlo, které se používá k měření modulu pružnosti ve smyku, má doby kyvu kolem pěti sekund. Za základní periodu si zvolíme 10 kyvů a tu změříme běžnými stopkami:

$$10T_k = 52,8 \text{ s.}$$

Pro naše měření odhadneme *krajní chybu* 0,4 s (ta závisí na použitých stopkách a reakční době experimentátora) a tím získáme pro dobu deseti kyvů interval:

$$52,4 \text{ s} \ < \ 10T_k \ < \ 53,2 \text{ s.}$$

Pro dvacet kyvů tedy můžeme očekávat interval:

$$104,8 \text{ s} \ < \ 20T_k \ < \ 106,4 \text{ s.}$$

Vzhledem k tomu, že tento interval $(106,4 - 104,8 = 1,6$ s) je užší než doba jednoho kyvu $T_k \approx 5,24$ s, stačí spustit stopky na začátku libovolného kyvu a *bez počítání kyvů* je zastavit při ukončení kyvu po 104,8 s. Na stopkách je při tomto čtení čas např. 105,4 s. Tím zjistíme, že interval pro 20 kyvů je:

$$105 \text{ s} \ < \ 20T_k \ < \ 105,8 \text{ s.}$$

Dále např. pro 100 kyvů:

$$525 \text{ s} \ < \ 100T_k \ < \ 529 \text{ s.}$$

I v tomto případě je rozdíl $(529 - 525 = 4$ s) menší než doba kyvu a proto po odečtení času ukončení kyvu po 525 s dostaneme zpřesněné odečtení doby $100T_k$. Je-li to např. 527,3 s, máme pro sto kyvů interval:

$$526,9 \text{ s} \ < \ 100T_k \ < \ 527,7 \text{ s.}$$

Odtud však snadno plyne:

$$5,269 \text{ s} \ < \ T_k \ < \ 5,277 \text{ s.}$$

Skutečná hodnota doby kyvu tedy s vysokou pravděpodobností leží kdekoliv v intervalu ±0,004 s kolem vypočtené hodnoty, takže standardní nejistotu (v tomto případě určenou metodou typu B) odhadneme jako $u(T_k) \approx (0{,}004/\sqrt{3})\,\text{s} = 0{,}0023\,\text{s}$.

Je zřejmé, že tímto postupem můžeme pro dostatečně dlouho se opakující děje dosáhnout veliké přesnosti. Nutnou podmínkou je volba pouze takových násobků základní periody, aby jejich meze byly menší než velikost měřené periody. Čím menší je krajní chyba základního měření v porovnání s délkou měřené periody, tím větších násobků lze použít a tím také rychleji dojdeme k výsledku s požadovanou přesností[4].

1.5 Dodatek – Vybrané vlastnosti některých materiálů

Materiál	E [10^{10} Pa]	G [10^{10} Pa]	k -
Hliník	7,07	2,64	0,34
Měď	12,3	4,55	0,35
Olovo	1,6	0,56	0,44
Diamant	112	52	0,1
Zinek	9,0	3,6	0,25
Železo α	21,2	8,2	0,29
Ocel	20-21	7,9-8,9	0,25-0,33
Ocel (1% C)	21,0	8,1	0,29
Ocel svářecí	20,4	7,9	0,29
Bronz	9,7-10,2	3,3-3,7	0,34-0,40
Bronz fosforový	12,0	4,36	0,38
Mosaz	9,9	4,2	0,37
Dural	7,25	2,75	0,34
Plexisklo	0,33	0,12	0,35

Tabulka 1.1: Youngův modul pružnosti E, modul pružnosti ve smyku G a Poissonova konstanta k pro vybrané pevné látky za pokojové teploty.

1.6 Použitá literatura

1. Michal Bednařík, Petr Koníček, Ondřej Jiříček: Fyzika I a II – Fyzikální praktikum, *[skriptum], Vydavatelství ČVUT*, Praha, 2003.

2. Jiří Bajer: Mechanika 2, *Univerzita Palackého v Olomouci*, Olomouc, 2008.

3. Jiří Bajer: Mechanika 3, *Univerzita Palackého v Olomouci*, Olomouc, 2012.

6. února 2013, Milan Červenka, *milan.cervenka@fel.cvut.cz*
(úprava původního textu [1])

[4]Při dostatečné zkušenosti experimentátora lze požadované přesnosti dosáhnout na jedno rozběhnutí experimentu, kdy potřebné meze jsou přepočítávány průběžně.