Laboratorní úloha

Měření viskozity kapalin Stokesovou metodou

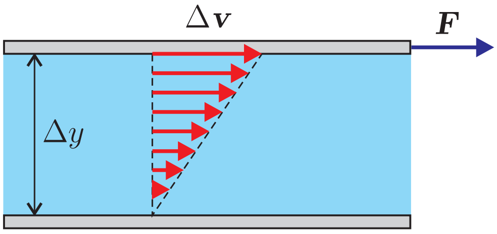
1.1 Úkol měření

Změřte dynamickou viskozitu glycerinu a ricinového oleje pomocí Stokesova viskozimetru.

1.2 Viskozita

Společnou vlastností kapalin, která je odlišuje od pevných látek, je jejich tekutost. Mohou téci z místa na místo, můžeme je dle libosti deformovat, dělit, rozlévat i slévat. Nemají žádný vlastní tvar, přizpůsobují se tvaru nádoby, ve které navíc vytvářejí hladinu.

Všechny kapaliny však nejsou stejně tekuté, voda nebo pivo jsou jistě tekutější než olej, med nebo Bailey's. O tekutosti kapaliny rozhoduje její viskozita. Příčinou viskozity jsou tečné síly vnitřního tření, které zapříčiňuje výměna hybnosti mezi molekulami sousedních vrstev kapaliny, které se pohybují různými rychlostmi.



Pokud se mezi dvěma rovnoběžnými deskami nachází viskózní tekutina a desky se navzájem pohybují různými rychlostmi, je k udržení konstantní rychlosti třeba působit silou. Z pozorování lze vyvodit závěr, že proti vzájemnému pohybu desek působí kapalina třecí silou, pro jejíž velikost platí

$$F = \eta S \frac{\Delta v}{\Delta y}, \tag{1.1}$$

kde Δv je vzájemná rychlost obou desek, Δy je jejich vzdálenost a S plocha. Koeficient úměrnosti η nazýváme součinitel dynamické viskozity dané kapaliny. Jednotkou dynamické viskozity je pascalsekunda (Pa s). Newtonův vzorec (1.1) platí jen pro malé vzájemné rychlosti[1]. Třecí síla působí i mezi jednotlivými vrstvami kapaliny, pokud se pohybují navzájem různými rychlostmi. V mnoha případech je rozložení rychlostí v proudící tekutině složitější než v předchozím případě. Pro tyto účely je výhodné používat vzorec (1.1) v obecnějším (diferenciálním) tvaru

$$\tau = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}, \tag{1.2}$$

[1] Přesněji řešeno, pro newtonovské kapaliny platí tehdy, pokud $\rho \Delta v \Delta y / \eta < 1500$, kde ρ je hustota kapaliny. Při splnění této podmínky je gradient rychlosti konstantní.

kde $\tau = F/S$ je smykové napětí. Kapalinám, pro které je tečné napětí přímo úměrné gradientu rychlosti, platí pro ně vztah (1.2), říkáme newtonovské a patří mezi ně např. voda, minerální oleje, líh, atd. I reálné plyny mají malou viskozitu, která je příčinou aerodynamického odporu. Viskozita tekutin je výrazně závislá na teplotě. Zatímco u kapalin s teplotou klesá, u plynů s teplotou roste.

U tzv. nenewtonovských kapalin není závislost tečného napětí a gradientu rychlosti lineární, jak popisuje vzorec (1.2), a patří mezi ně např. laky, kaly, ropa, vápno a další.

Kapalina	η [mPa s]	**Plyn**	η [μPa s]
Glycerin	1480	Neon	32,1
Ricinový olej	989	Kyslík	20,8
Olivový olej	80,8	Hélium	20,0
Kyselina sírová	25,4	Vzduch	18,6
Rtuť	1,554	Vodík	9,0
Voda	1,002	Propan	8,3

Tabulka 1.1: Dynamická viskozita některých kapalin a plynů pro $T = 20^o$C a normální atmosférický tlak.

1.3 Odpor prostředí

Příčinou odporu, který kladou tekutiny pohybujícím se objektům, je vždy viskozita. Dá se dokázat tzv. d'Alembertův paradox, podle kterého ideální tekutina s nulovou viskozitou neklade obtékaným tělesům žádný odpor. Pohybuje-li se těleso ve viskózní tekutině, působí na něj odporová síla, jejíž směr je opačný oproti směru pohybu tělesa. Při pomalém pohybu předpokládáme, že viskózní tekutina lne ke stěnám tělesa, smykové napětí u těchto stěn není nulové a proto tekutina na těleso působí nenulovou silou. Dalším zdrojem odporové síly působící na těleso je nerovnoměrné rozložený tlak před a za tělesem (tato nerovnoměrnost je rovněž zapříčiněna viskozitou), jehož změny souvisejí s charakterem obtékání tělesa.

Odpor, který klade prostředí pohybujícímu se (obtékanému) tělesu, je poměrně složitou funkční závislostí tvaru tělesa, rychlosti a viskozity a ve většině případů se určuje experimentálně. Důležitým parametrem je zde bezrozměrné Reynoldsovo číslo, definované jako

$$\mathrm{Re} = \frac{vl}{\nu},$$

kde v je vzájemná rychlost tělesa a kapaliny[2], l je nějaký charakteristický rozměr tělesa (např. průměr pro kouli) a $\nu = \eta/\rho$ je kinematická viskozita, kde ρ je hustota tekutiny.

Jestliže pro Reynoldsovo číslo platí $\mathrm{Re} < 1$, převládá v odporu prostředí vliv viskózních smykových sil. Pro kouli lze v tomto případě pro velikost odporové síly odvodit Stokesův zákon

$$F = 6\pi\eta r v, \tag{1.3}$$

kde r je poloměr koule. Stokesův zákon tedy vyjadřuje skutečnost, že velikost odporové síly je pro malé Reynoldsovo číslo přímo úměrná velikosti rychlosti tělesa.

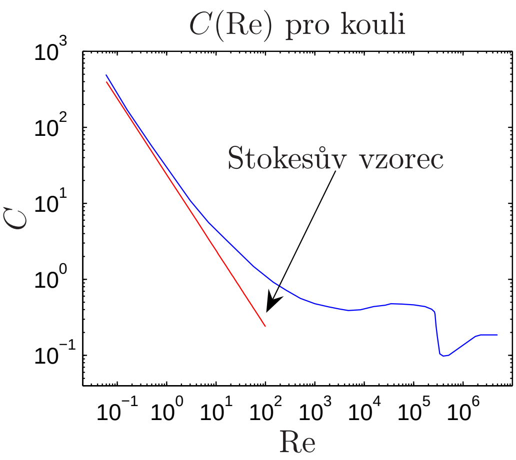
Obecně se pro popis odporové síly pro různé tvary těles a různé rychlosti používá Newtonův vzorec

$$F = \frac{1}{2}C\rho S v^2, \tag{1.4}$$

[2]Měřená oproti místu, kde rychlost kapaliny již není narušena přítomností pohybujícího se tělesa.

kde $C = C(\mathrm{Re})$ je součinitel odporu a S je čelní průřez (vzhledem ke vzájemné rychlosti) tělesa. Součinitel odporu závisí na tvaru tělesa a obecně i na Reynoldsově čísle a tato funkční závislost se určuje experimentálně. Například pro kouli a Reynoldsovo číslo v intervalu $10^3 < \mathrm{Re} < 10^5$ platí $C \approx 0,5$. Porovnáním vzorců (1.3) a (1.4) můžeme pro kouli a $\mathrm{Re} < 1$ psát

$$C = \frac{12\eta}{\rho r v} = \frac{24}{\mathrm{Re}}.$$



1.4 Volný pád ve viskózní kapalině

Určování viskozity kapaliny pomocí Stokesova viskozimetru je založeno na studiu volného pádu kuličky ve zkoumané kapalině. Na kuličku působí tři síly: tíhová $\boldsymbol{F}_\mathrm{g}$, vztlaková $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$ a odporová $\boldsymbol{F}_\mathrm{o}$. Pro tíhovou sílu platí

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{g} = m\boldsymbol{g},$$

kde m je hmotnost kuličky a $\boldsymbol{g}$ vektor tíhového zrychlení. Velikost vztlakové síly je dle Archimédova zákona rovna tíze kapaliny, která by zaujímala objem ponořeného tělesa, takže pro ni platí

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{g} = -m_\mathrm{kap}\,\boldsymbol{g} = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\,\boldsymbol{g},$$

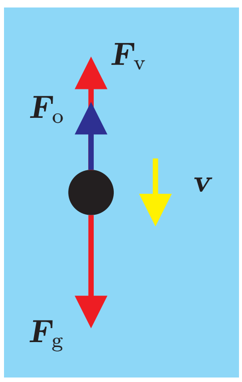
kde r je poloměr kuličky. Pokud bude viskozita kapaliny velká a současně poloměr kuličky malý, bude se pro $\mathrm{Re} < 1$ odporová síla řídit Stokesovým zákonem a můžeme pro ni psát

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{o} = -6\pi\eta r\,\mathbf{v},$$

kde $\mathbf{v}$ je rychlost kuličky.

Pohybovou rovnici kuličky tedy můžeme psát ve tvaru

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_\mathrm{g} + \boldsymbol{F}_\mathrm{v} + \boldsymbol{F}_\mathrm{o} = \left(m - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right)\boldsymbol{g} - 6\pi\eta r\,\mathbf{v}. \tag{1.5}$$



Vektorovou rovnici (1.5) můžeme dále zjednodušit. Pokud bude počáteční rychlost kuličky nulová, $\mathbf{v}(t=0) = \mathbf{v}_0 = \boldsymbol{0}$, bude se pohybovat přímočaře ve směru vektoru tíhového zrychlení[3]. Zvolíme-li směr vektoru tíhového zrychlení jako kladný, můžeme rovnici (1.5) pro složku vektoru rychlosti v příslušném směru zjednorozměrnit do tvaru

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \left(m - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right) g - 6\pi\eta r v. \tag{1.6}$$

Zavedeme-li pomocné veličiny $\alpha = g(1-\rho/\rho_\mathrm{k})$, kde ρ_k je průměrná hustota kuličky a $\beta = 9\eta/(2r^2\rho_\mathrm{k})$, můžeme rovnici (1.6) přepsat a upravit následujícím způsobem

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \alpha - \beta v \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\alpha - \beta v} = \mathrm{d}t \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^v \frac{\mathrm{d}x}{\alpha - \beta x} = \int_0^t \mathrm{d}y$$

[3]Tedy pokud bude její průměrná hustota větší než hustota tekutiny.

a vypočtením příslušných integrálů najít její řešení

$$t = \left[-\frac{1}{\beta} \ln |\alpha - \beta x| \right]_0^v = \frac{1}{\beta} \ln \left| \frac{\alpha}{\alpha - \beta v} \right| \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta t}\right) = v_\infty \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta t}\right). \tag{1.7}$$

Z posledního vzorce vyplývá, že rychlost kuličky exponenciálně narůstá od nuly k hodnotě

$$v_\infty = \frac{2gr^2(\rho_\mathrm{k} - \rho)}{9\eta}. \tag{1.8}$$

Dobu dosažení p–násobku[4] rychlosti v_∞ můžeme vypočítat dosazením do rovnice (1.7), tedy

$$p = 1 - \mathrm{e}^{-\beta t_p} \qquad \Rightarrow \qquad t_p = -\frac{\ln(1-p)}{\beta} = -\ln(1-p)\frac{2r^2\rho_\mathrm{k}}{9\eta}. \tag{1.9}$$

Za tuto dobu urazí kulička vzdálenost[5]

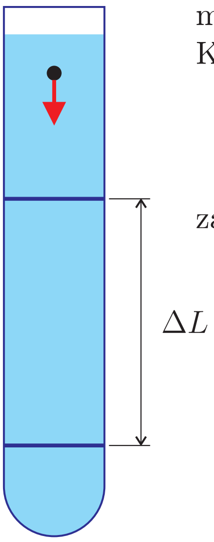
$$\Delta l_p = \int_0^{t_p} v_\infty \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta t}\right) = v_\infty \left[t + \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta t} \right]_0^{t_p} = v_\infty \left[t_p + \frac{1}{\beta}\left(\mathrm{e}^{-\beta t_p} - 1\right) \right] =$$

$$= -\frac{v_\infty}{\beta} \left[\ln(1-p) + p\right] = -\left[\ln(1-p) + p\right] \frac{4gr^4\rho_\mathrm{k}(\rho_\mathrm{k} - \rho)}{81\eta^2}. \tag{1.10}$$

Dosazením například pro $p = 0,99$ dostaneme

$$t_{99} \approx \frac{\rho_\mathrm{k} r^2}{\eta}, \qquad \Delta l_{99} = 0,18\,\frac{gr^4\rho_\mathrm{k}(\rho_\mathrm{k} - \rho)}{\eta^2}. \tag{1.11}$$

1.5 Stokesův viskozimetr



Stokesův viskozimetr je průhledná nádoba naplněná zkoumanou kapalinou, v níž se měří doba pádu ΔT vhodně zvolené kuličky mezi dvěma značkami o vzdálenosti ΔL. K výpočtu viskozity se použije vzorec (1.8) přepsaný do tvaru

$$\eta = \frac{2}{9} gr^2(\rho_\mathrm{k} - \rho)\frac{\Delta T}{\Delta L} \tag{1.12}$$

za předpokladu, že jsou splněny následující podmínky.

- Značky jsou umístěny v takové vzdálenosti, že pohyb kuličky mezi nimi lze považovat za rovnoměrný.
- Poloměr nádoby je výrazně větší než poloměr kuličky, ta by se neměla pohybovat v blízkosti stěny.
- Platí $\mathrm{Re} < 1$. V opačném případě je třeba zvolit kuličku s menší hustotou a poloměrem.

V níže uvedené tabulce jsou pro ilustraci vypočtené hodnoty pro různé kapaliny při teplotě 20°C a železnou kuličku o poloměru 1 mm ($\rho_\mathrm{k} = 7860\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$).

[4] $p \in <0, 1)$

[5] Sami se můžete přesvědčit, že platí $\ln(1-p) + p < 0$ pro $p \in <0, 1)$.

Látka	η [mPa s]	ρ [kg m^{-3}]	v_∞ [cm s^{-1}]	t_{99} [ms]	Δl_{99} [mm]	Re [-]
Glycerin	1480	1261	0,97	5,4	0,041	0,017
Ricinový olej	989	960	1,53	8.2	0,099	0,030
Transformátorový olej	866	31,6	48,2	254	96,4	**26,4**

Z tabulky je vidět, že pro měření viskozity transformátorového oleje by bylo třeba postupovat jinak, neboť s použitím Stokesova zákona zde vychází Re > 1, ale pro takovéto hodnoty již Stokesův zákon neplatí.

1.6 Postup měření

Postup měření je stejný jak pro glycerin, tak pro ricinový olej.

1. Do Petriho misky si odpočítejte 12 kuliček a změřte jejich poloměr.
2. Pomocí předvážek určete přibližnou hmotnost Petriho misky s kuličkami. Na analytických vahách zjistěte hmotnost kuliček tak, že nejdříve zvážíte Petriho misku s kuličkami a pak **stejnou** Petriho misku bez kuliček.
3. Na „zkumavce“ s měřenou kapalinou si nastavte a změřte vzdálenost gumových kroužků, mezi kterými budete měřit dobu pádu kuliček. Horní kroužek umístěte alespoň 5 cm pod hladinu.
4. Pomocí dvojité olovnice zkontrolujte a případně nastavte svislý směr „zkumavky“.
5. Pomocí stopek změřte dobu pádu kuliček mezi gumovými kroužky. Nejmenší a největší naměřenou hodnotu vyřaďte.
6. Pomocí hustoměru odečtěte hustotu kapaliny.
7. S ohledem na výraznou teplotní závislost viskozity na teploměru odečtěte teplotu a uveďte ji u výsledku vašeho měření.

1.7 Použitá literatura

1. Jiří Bajer: Mechanika 3, *Univerzita Palackého v Olomouci*, Olomouc, 2006.
2. Yasuki Nakayama, Robert Bouche: Introduction to Fluid Mechanics, *Butterworth-Heinemann*, Oxford, 1999.
3. Antonín Havránek: Klasická mechanika II - Kontinuum, *Univerzita Karlova v Praze*, Praha, 2003.
4. Jaromír Brož: Základy fyzikálních měření, *Státní pedagogické nakladatelství*, Praha, 1983.

29. ledna 2013, Milan Červenka, *milan.cervenka@fel.cvut.cz*