

## Laboratorní úloha

# Stanovení Youngova modulu pružnosti v tahu přímou metodou

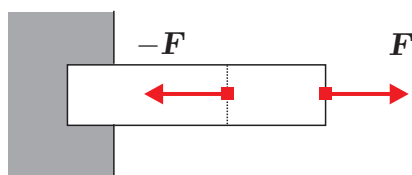
## 1.1 Úkol měření

1. Určete Youngův modul pružnosti v tahu přímou metodou pro dva vzorky různých materiálů a výsledky porovnejte s tabulkovými hodnotami.

## 1.2 Teoretický úvod

### 1.2.1 Mechanické napětí

Na rozdíl od idealizovaných *tuhých těles*, působí-li vnější síly na tělesa reálná, mohou způsobit změnu jejich objemu, tvaru (ohnutí, zkroucení, pomačkání, ...), případně i zlomení, přetržení, atp. V těchto případech hovoříme pružnosti a pevnosti těles.



Obrázek 1.1: K mechanickému napětí.

a je zprostředkována meziatomovými silami materiálu tyče. Mírou mechanického napětí materiálu je veličina

Uvažujme tyč, která je na jednom konci pevně vetknuta ve stěně a na druhém konci namáhána tahovou silou  $\mathbf{F}$ , viz obrázek 1.1. Tyč je v klidu a v rovnováze, nicméně její stav se liší od případu, kdy není namáhána. Rozdíl je v přítomnosti mechanického napětí v celém objemu tyče, které je způsobeno tahovou silou. O přítomnosti tohoto napětí se můžeme přesvědčit takto. Tyč rozřízneme myšleným řezem kolmým k její ose. Jelikož se odříznutá část tyče nachází v klidu, musí v místě řezu působit síla  $-\mathbf{F}$ , která kompenzuje tahovou sílu  $\mathbf{F}$ . Tato síla působí v libovolném řezu tyče

$$\sigma = \frac{F}{S},$$

kde  $S$  je průřez, kterou nazýváme jednoduše mechanickým napětím a měříme ji v pascálech, stejně jako tlak v plynech a kapalinách.

V předchozím myšlenkovém pokusu jsme si intuitivně vybrali rovinu řezu kolmou k podélné ose tyče, normálový vektor roviny řezu je tedy kolineární se silovou reakcí  $-\mathbf{F}$ . V tomto případě hovoříme o tzv. normálovém napětí. Jelikož rovina myšleného řezu může být obecně volena naprosto libovolně, může silová reakce s její orientovanou normálou svírat libovolný úhel a mechanické napětí v tomto obecném případě nemůže být popsáno skalární veličinou, obecně se tedy jedná o veličinu tenzorovou. V následujícím textu však mechanickým napětím budeme mít na mysli napětí normálové.

## 1.2.2 Hookův zákon

Budeme-li namáhat tyč délky  $l_0$  v tahu podélně působící silou o velikosti  $F$ , dojde k jejímu prodloužení na délku  $l$ . Pokud není působící síla příliš velká, je prodloužení  $\Delta l = l - l_0$  přímo úměrné její velikosti a platí Hookův zákon

$$\Delta l \sim F.$$

Po odstranění tahové síly dojde k opětovnému zkrácení tyče na původní délku  $l_0$ . Hovoříme o tzv. *pružné deformaci*. Experimenty ukazují, že pružné prodloužení tyče je přímo úměrné její délce  $l_0$  a nepřímo úměrné jejímu průřezu  $S_0$ , takže Hookův zákon můžeme psát ve tvaru

$$\Delta l = \frac{l_0}{ES_0}F, \quad (1.1)$$

kde konstanta úměrnosti  $E$  se nazývá Youngův modul pružnosti, závisí na materiálu tyče (je to materiálová konstanta) a měříme ji v pascálech. Hookův zákon platí i pro deformaci v tlaku a obě deformace popisuje stejný Youngův modul pružnosti. Ze vzorce (1.1) je možné vyloučit geometrické rozměry tyče tím, že zavedeme relativní prodloužení (deformaci) tyče  $\varepsilon = \Delta l/l_0$  a mechanické napětí  $\sigma = F/S_0$ . Vzorec tak přejde do tvaru

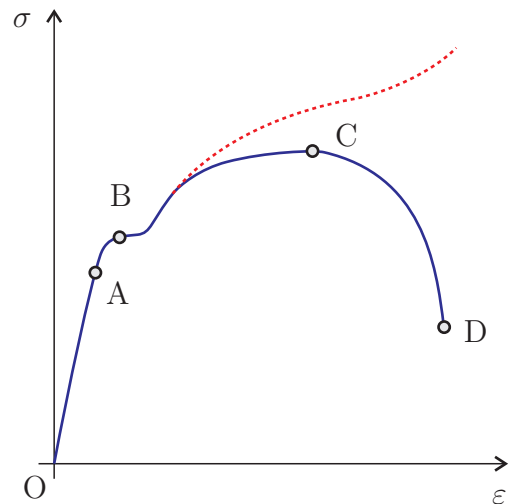
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}. \quad (1.2)$$

## 1.2.3 Napěťový diagram

Výše zmíněný Hookův zákon platí pouze pro *malá* napětí, závislost  $\sigma(\varepsilon)$  obecně není lineární, graficky ji zobrazujeme do tzv. napěťového diagramu, viz obrázek 1.2.

Hookův zákon platí v lineární oblasti napěťového diagramu až do tzv. meze úměrnosti (bod A). Poté následuje krátká oblast končící tzv. mezí pružnosti, neboli elasticity (bod B). Až do tohoto bodu se tyč po uvolnění působící síly vrací na původní délku  $l_0$ , i když Hookův zákon již neplatí. Dále následuje oblast plastické deformace, kdy se po uvolnění působící síly tyč již nevrací do původní délky. Tato oblast obsahuje tzv. mez kluzu (bod C), při jejímž dosažení dochází k nárůstu relativního prodloužení i bez dalšího zvyšování napětí v důsledku tečení materiálu tyče, při kterém dochází ke změně vnitřní struktury. Při dalším růstu napětí může dojít k překročení meze pevnosti (bod D) a k přetržení tyče.

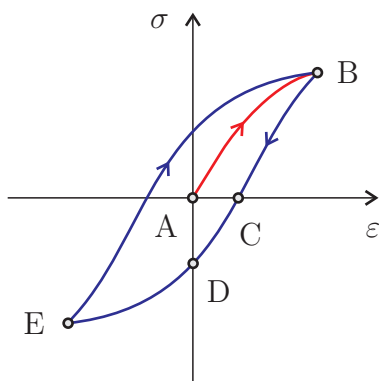
V posledním úseku napěťového diagramu (mezi body C a D) se zdá, že s rostoucím relativním prodloužením dochází k poklesu mechanického napětí, což ale není pravda. Zdánlivý pokles napětí je dán zmenšováním průřezu tyče  $S$  při jejím namáhání. Protože je prakticky nemožné měřit namáháním zmenšovaný průřez tyče, vztahujeme tahovou sílu k původnímu průřezu tyče  $S_0$ , čímž dochází k onomu zdánlivému poklesu. Skutečné mechanické napětí  $F/S$  je rostoucí funkcí, na obrázku je naznačeno přerušovanou čarou.



Obrázek 1.2: Napěťový diagram.

## 1.2.4 Hystereze

V oblasti plastické deformace se již obvykle projevuje paměť deformovaného materiálu, kterou je možné názorně ilustrovat na tzv. hysterezní smyčce BCDEB, viz obrázek 1.3.



Obrázek 1.3: Hysterezní smyčka.

Při prvotní deformaci materiálu probíhá deformace podle panské křivky AB, která je zpočátku lineární (Hookův zákon). Při následném poklesu napětí se však deformace mění podle křivky BC, při uvolnění napětí zůstává trvalá deformace  $\varepsilon_C$  odpovídající bodu C. K jejímu odstranění je pak zapotřebí tlakového napětí  $\sigma_D$  (bod D).

### 1.2.5 Změna objemu

Uvažujme tyč ve tvaru kvádrů o rozměrech  $a \times b \times c$ . Necht' podél strany  $a$  působí *malá* tahová síla o velikosti  $F$ . Podle Hookova zákona bude pro relativní prodloužení tyče platit  $\varepsilon = \Delta a/a = \sigma/E$ . Přesná měření ukazují, že s podélným prodloužením tyče dochází rovněž k jejímu příčnému zúžení, relativní zúžení  $\eta = \Delta b/b = \Delta c/c$  je přímo úměrné podélnému relativnímu prodloužení a platí

$$\eta = -k\varepsilon,$$

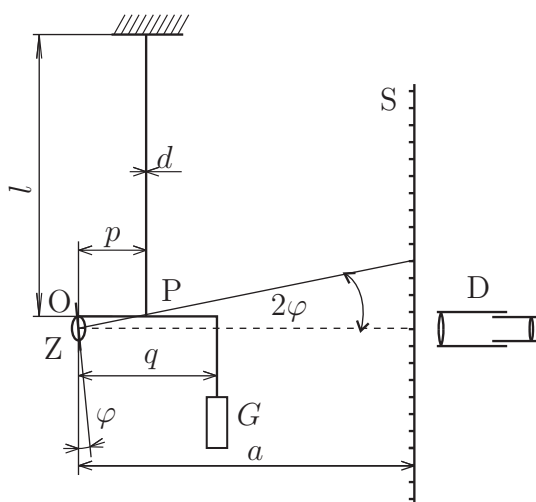
kde  $k$  je tzv. Poissonovo číslo a jedná se o materiálový parametr. Pro změnu objemu tyče namáhané podélným tahem tedy dostaneme

$$\Delta V = (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c) - abc \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} \approx (1 - 2k)\varepsilon.$$

Pro běžné technické materiály se hodnota Poissonova čísla obvykle pohybuje v intervalu  $0,25 \sim 0,35$ , takže při namáhání tahem dochází ke zvětšování jejich objemu. Materiálové parametry  $E$  a  $k$  plně určují elastické vlastnosti homogenní izotropní látky.

## 1.3 Experiment

### 1.3.1 Zrcátková metoda



Obrázek 1.4: Zrcátková metoda.

Jelikož dochází jen k velmi malým délkovým změnám, provádíme vlastní měření velikosti prodloužení zkoumaného materiálu při namáhání v tahu tzv. *zrcátkovou metodou*.

Měření provádíme tak, že měřený drát o délce  $l$  a průměru  $d$  nejprve zatěžuje závaží o hmotnosti  $m_0$ , zavěšené na konci páky P o délce  $q$  (viz obr. 1.4), které má za účel drát narovnat.

Vzdálenost uchycení drátu od osy otáčení O je  $p$ . Na ose otáčení páky P je umístěno zrcátko Z, ve kterém se odráží stupnice S. Odraženou stupnicí v zrcátku pozorujeme dalekohledem D. Zavěšení dalšího závaží na konec páky P způsobí nárůst tíhové síly<sup>1</sup> o hodnotu  $\Delta G = \Delta mg$ , kde  $\Delta m$  je hmotnost přidaného závaží (a tedy změna hmotnosti zatěžující páky) a  $g$  je tíhové zrychlení, dojde k prodloužení drátu o  $\Delta l$  a v důsledku toho se zrcátko Z pootočí o úhel  $\varphi$ . Podle zákonů geometrické optiky, otočí-li se rovinné zrcadlo o úhel  $\varphi$ , otočí se odražený paprsek o úhel dvojnásobný. Pootočení zrcátka Z

li se rovinné zrcadlo o úhel  $\varphi$ , otočí se odražený paprsek o úhel dvojnásobný. Pootočení zrcátka Z

<sup>1</sup>Ta na drát ovšem působí přes pákový mechanismus.

se projeví v dalekohledu tím, že místo dílku  $n_0$ , který byl ve středu nitkového kříže dalekohledu při zatížení hmotností  $m_0$ , posune se do středu nitkového kříže dílek  $n$  (v našem případě bude odpovídat jednomu dílku 1 mm). Za předpokladu, že prodloužení  $\Delta l$  je značně menší než délka drátu  $l$  a vzdálenost zrcátka od stupnice  $a$ , můžeme pro určení úhlu  $\varphi$  použít vztah

$$\frac{\Delta n}{a} = \operatorname{tg} 2\varphi \approx 2\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\Delta n}{2a}, \quad (1.3)$$

kde  $\Delta n = n - n_0$ . Prodlouží-li se drát o  $\Delta l$ , pootočí se páka P o úhel  $\varphi$  a dle obrázku 1.4 pro úhel  $\varphi$  platí vztah

$$\frac{\Delta l}{p} = \operatorname{tg} \varphi \approx \varphi. \quad (1.4)$$

Vyloučením úhlu  $\varphi$  ze vztahů (1.3) a (1.4) dostaneme vztah pro relativní prodloužení  $\varepsilon$  ve tvaru

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{p\Delta n}{2al_0}. \quad (1.5)$$

Dosadíme-li do vztahu (1.1) za relativní prodloužení z (1.5), a položíme-li  $F = q\Delta G/p$  a  $S_0 = \pi d^2/4$ , dostaneme pro Youngův modul pružnosti  $E$  vztah

$$E = \frac{8gal_0q}{\pi d^2 p^2} \frac{\Delta m}{\Delta n}. \quad (1.6)$$

Prakticky je velmi obtížné stanovit délku nezatíženého drátu, neboť může být (je) zkroucený. Počáteční délku  $l_0$  tedy změříme při základním zatížení jedním závažím<sup>2</sup> o hmotnosti  $m_0$ . Takto zatížený (narovnaný) drát budeme považovat za „nezatížený“.

Dalekohled nastavíme tak, aby byla vidět ostře stupnice i nitkový kříž. Vzdálenost zrcátka od stupnice nastavíme na 1 m. Podle materiálu měřeného drátu a podle jeho průměru volíme velikost závaží a postupně přikládáme pět kusů zvoleného závaží. Potom postupně ubíráme až k základnímu zatížení, které slouží k narovnání drátu.

### 1.3.2 Zpracování naměřených dat

Měření bychom mohli orientačně vyhodnotit tak, že do vztahu (1.6) kromě geometrických rozměrů a tíhového zrychlení dosadíme  $\Delta m = 5 \times m_1$ , kde  $m_1$  je hmotnost jednoho závaží a  $\Delta n = \Delta n_5$ , což je příslušné posunutí nitkového kříže po stupnici. My však budeme postupovat jinak, abychom využili všech naměřených dat a ověřili si, že byly splněny vstupní předpoklady.

Vzorec (1.6) přepíšeme do tvaru

$$\Delta n = \alpha \Delta m, \quad (1.7)$$

kde

$$\alpha = \frac{8gal_0q}{\pi d^2 p^2 E} \quad (1.8)$$

jde konstanta úměrnosti. Dvojice hodnot  $[\Delta m_i, \Delta n_i]$ , kde  $\Delta m_i = im_1$  vyneseme do grafu. Body by měly ležet na přímce procházející počátkem. Tyto body pomocí metody nejmenších čtverců<sup>3</sup>

<sup>2</sup>I když drát tímto zatížíme a dojde k jeho prodloužení o  $\Delta l'$  a vlastně neměříme délku  $l_0$ , ale  $l_0 + \Delta l'$ , platí  $\Delta l' \ll l_0$ , takže naměřenou délku můžeme považovat za délku nezatíženého drátu  $l_0$ . Příslušné prodloužení  $\Delta l'$  je bezpečně maskováno nejistotou měření délky drátu pomocí pásmového měřidla.

<sup>3</sup>Za tímto účelem můžete použít Univerzální nástroj pro kreslení grafů na adrese <http://herodes.feld.cvut.cz/mereni/>. Pozorného čtenáře jistě napadne, že naměřená data by bylo možné proložit přímkou procházející počátkem, neboť určováním koeficientu  $B$  (který by měl být nulový) se zbytečně připravujeme o jeden stupeň volnosti. Situace je většinou taková, že drát je i při základním zatížení ještě mírně zkroucen a hodnota  $\Delta n_1$  je zpravidla zatížena jistou systematickou chybou, která je použitým postupem kompenzována.

proložíme přímkou

$$\Delta n = A\Delta m + B, \quad (1.9)$$

díky níž získáme hodnoty parametrů  $A$  a  $B$  (a jejich nejistoty). Porovnáním vztahů (1.9) a (1.7) dostaneme dosazením do vztahu (1.8) vzorec pro výpočet Youngova modulu pružnosti

$$E = \frac{8gal_0q}{\pi d^2 p^2 A},$$

nejistotu určíme standardním způsobem.

### 1.3.3 Postup měření

**Upozornění:** Před zahájením operací s měřícím zařízením je nezbytné si nasadit na obličej ochranný štít.

1. Změřte délku drátu kovovým pásmovým měřítkem při základním zatížení s přesností na milimetry<sup>4</sup>, změřte vzdálenost zrcátka a stupnice.
2. Posuvkou změřte (několikrát a co nejpřesněji) délku páky  $q$  a vzdálenost  $p$  upevnění drátu na páce  $P$  od osy otáčení  $O$ .
3. Změřte (alespoň  $10\times$ ) průměr drátu mikrometrem na různých místech, abyste si ověřili konstantní průměr drátu.
4. Podle materiálu a průměru drátu volte velikost závaží. Pro slabší drát použijte sadu půlkilových závaží a pro silnější drát sadu kilových závaží.
5. Pomocí dalekohledu odečtěte na stupnici „nulovou“ hodnotu  $n'_0$ , přidávejte jednotlivá závaží a odečítejte příslušné hodnoty  $n'_i$ , kde  $i = 1, \dots, 5$ , abyste mohli vypočítat  $\Delta n'_i = n'_i - n'_0$ .
6. Označte  $n''_5 = n'_5$ , postupně odebírejte jednotlivá závaží a v dalekohledu odečítejte hodnoty  $n''_i$ , kde  $i = 4, \dots, 0$ , abyste mohli vypočítat  $\Delta n''_i = n''_i - n''_0$ . Po měření je na aparatuře zavěšeno jen závaží pro vyrovnání drátu.
7. Vypočtěte  $\Delta n_i = (\Delta n'_i + \Delta n''_i)/2$ .
8. Do grafu vynesete hodnoty  $[\Delta m_i, \Delta n_i]$  a metodou nejmenších čtverců je proložte přímkou, viz odstavec 1.3.2.
9. Z naměřených hodnot vypočtěte Youngův modul pružnosti daného materiálu, viz odstavec 1.3.2.
10. Měření zopakujte pro vzorek z druhého materiálu.

## 1.4 Použitá literatura

1. Michal Bednařík, Petr Koníček, Ondřej Jiříček: Fyzika I a II – Fyzikální praktikum, [skriptum], Vydavatelství ČVUT, Praha, 2003.
2. Jiří Bajer: Mechanika 3, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2012.
3. Richard P. Feynman, Robert B. Leighton a Matthew Sands: Feynmanovy přednášky z fyziky 2/3 s řešenými příklady, Fragment, Praha, 2001.

---

<sup>4</sup>Měřený drát prochází úchytným šroubem, a proto jeho délku měříme od hlavičky tohoto šroubu.

## 1.5 Dodatek – Vybrané vlastnosti některých materiálů

Materiál	$E$ [ $10^{10}$ Pa]	$G$ [ $10^{10}$ Pa]	$k$ -
Hliník	7,07	2,64	0,34
Měď	12,3	4,55	0,35
Olovo	1,6	0,56	0,44
Diamant	112	52	0,1
Zinek	9,0	3,6	0,25
Železo $\alpha$	21,2	8,2	0,29
Ocel	20-21	7,9-8,9	0,25-0,33
Ocel (1% C)	21,0	8,1	0,29
Ocel svářecí	20,4	7,9	0,29
Bronz	9,7-10,2	3,3-3,7	0,34-0,40
Bronz fosforový	12,0	4,36	0,38
Mosaz	9,9	4,2	0,37
Dural	7,25	2,75	0,34
Plexisklo	0,33	0,12	0,35

Tabulka 1.1: Youngův modul pružnosti  $E$ , modul pružnosti ve smyku  $G$  a Poissonova konstanta  $k$  pro vybrané pevné látky za pokojové teploty.

17. září 2013, Milan Červenka, [milan.cervenka@fel.cvut.cz](mailto:milan.cervenka@fel.cvut.cz)  
(úprava původního textu [1])